



# Détermination de la constante de Planck au moyen d'une balance du watt

Matthieu Thomas

## ► To cite this version:

Matthieu Thomas. Détermination de la constante de Planck au moyen d'une balance du watt. Instrumentations et Détecteurs [physics.ins-det]. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2015. Français. NNT : 2015CNAM1033 . tel-01359640

**HAL Id: tel-01359640**

**<https://theses.hal.science/tel-01359640>**

Submitted on 2 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée par :

**Matthieu THOMAS**

soutenue le : 5 juin 2015

pour obtenir le grade de : **Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers**

Discipline/ Spécialité : Lasers, nanosciences et métrologie

## Détermination de la constante de Planck au moyen d'une balance du watt

### THÈSE dirigée par :

**Dr Patrick JUNCAR**

Professeur des universités, Conservatoire national des arts et métiers

### RAPPORTEURS :

**Dr Richard DAVIS**

Physicien chercheur, Bureau international des poids et mesures

**Dr Ali EICHENBERGER**

Docteur ès sciences, Metas

### JURY :

**Dr Daniel ESTÈVE**

Directeur de recherche, Commissariat à l'énergie atomique

**Dr François NEZ**

Directeur de recherche, laboratoire Kastler Brossel

**Dr Patrick ESPEL**

Ingénieur de recherche, Laboratoire national de métrologie et d'essais





# Détermination de la constante de Planck au moyen d'une balance du watt

THÈSE

dans la discipline Lasers, nanosciences et métrologie

présentée et soutenue publiquement le 5 juin 2015 à Paris par

Matthieu THOMAS

pour l'obtention du

doctorat du Conservatoire national des arts et métiers

de l'école doctorale Sciences des métiers de l'ingénieur

devant le jury composé de

Richard DAVIS	BIPM	Rapporteur
Ali EICHENBERGER	METAS	Rapporteur
Patrick ESPEL	LNE	Examineur
Daniel ESTÈVE	CEA	Président du jury
Patrick JUNCAR	CNAM	Directeur de thèse
François NEZ	CNRS	Examineur



**Détermination de la  
constante de Planck  
au moyen d'une balance du watt**

Une version électronique de ce document est accessible en  
<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01245089>, en <http://bit.ly/1M41IJ9> ou en  
<http://tinyurl.com/htwzb2>.

---

# Table des matières abrégée

---

Remerciements	iii
Résumé	vii
Abstract	ix
Table des matières	xi
Liste des acronymes et abréviations	xv
Liste des symboles	xvii
Table des figures	xxvi
Liste des tableaux	xxvii
Introduction	1
1 Contexte métrologique	5
2 Description de la balance du watt	37
3 Caractérisations préliminaires	69
4 Forces et moments parasites en phase statique	105
5 Détermination de la valeur de la constante de Planck	135
Conclusion & perspectives	151
A Système international d'unités	155
B Caractéristiques métrologiques du codeur linéaire	161
C Équations du modèle du double pendule	165
D Liste des publications	173
Bibliographie	175
Résumé	198



---

# Remerciements

---

Une expérience de l'ambition de la balance du watt nécessite une conception et une réalisation débutant très en amont de l'arrivée de l'étudiant qui participera aux premières déterminations de  $h$  : de nombreuses personnes que je n'ai pas connues personnellement ont participé à cette première aventure.

Gérard GENEVÈS aura été le moteur de ce projet dès son origine : il m'aura fait l'honneur d'accepter ma candidature comme thésard et j'aurai eu la chance de travailler en bénéficiant de ses conseils durant la plus grande partie de ma thèse. Sa très grande expérience de la métrologie, et sa plus vaste encore expérience de la métrologie électrique m'auront fait découvrir une discipline dont je n'entrevois qu'avec peine l'existence au début de ma thèse. À l'heure de la rédaction de ces lignes, je travaille toujours sur la balance du watt et il ne se passe pas un jour sans que la pertinence de tel ou tel détail de la conception de la balance, la profondeur de telle ou telle considération métrologique ne me donne une nouvelle leçon de physique.

Je n'ai eu la chance de rencontrer François VILLAR que brièvement, mais son apport en mécanique fut tel au cours des années où il fit parti de l'équipe balance du watt que son manuscrit fut pour moi un réel compagnon ; sa lecture un grand enrichissement et une source d'inspiration.

Franck BIELSA a été membre de l'équipe de la balance du watt durant plusieurs années, et pendant la plus grande partie de ma thèse. Sa culture en physique et son travail sur l'expérience en termes d'optique, d'instrumentation et d'électronique est considérable, et j'aurai beaucoup appris à son contact. Les résultats décrits dans cette thèse doivent également beaucoup à son travail.

Une expérience de *balance* du watt nécessite de disposer de masses étalons et de connaître leurs conditions et limites d'utilisation : l'ensemble nous fut fournis par Patrick PINOT, dont la grande culture de la métrologie des masses lui a toujours permis de répondre aux questions que ma curiosité pour ce domaine amenait à mon esprit. De plus, ses qualités de plume, en anglais et en français, auront toujours aiguillonné mon écriture lors de la rédaction de documents scientifiques.

La grande connaissance de mon directeur de thèse, Patrick JUNCAR, de l'expérimentation et de l'expérience de la balance du watt en particulier ont été d'une aide précieuse : son imagination expérimentale, son enthousiasme et ses connaissances métrologiques auront toujours été d'un grand secours.



François PIQUEMAL est devenu le responsable du projet de la balance du watt à la fin de ma thèse : il a de plus été le relecteur des différentes versions de ma thèse et a contribué significativement à la qualité de ce manuscrit.

Présent tout d'abord par intermittence au début de ma thèse, Djamel ZIANE est désormais un membre à temps plein de l'équipe balance du watt. Ses compétences en informatique et en instrumentation sont remarquables, de même que son exigence scientifique et son respect de la logique. Je ne peux compter le nombre de fois où égaré dans l'entrelacs d'appareils commandant d'autres appareils commandant d'autres appareils *ad lib...* il m'a rappelé que le principe de causalité n'était pas qu'une expression. Il a également apporté sa contribution à l'élaboration de ce manuscrit.

Patrick ESPEL, mon co-encadrant de thèse, aura accompagné toutes les étapes de ce travail. J'aimerais à travers ces lignes le remercier particulièrement : il m'aura guidé et éclairé à chaque étape. J'aurai beaucoup appris auprès de lui, scientifiquement mais aussi humainement. Son aide précieuse, ses conseils auront largement contribué à l'accomplissement de ce travail. Ces quelques lignes ne suffisent pas à rendre justice à son apport : des problèmes expérimentaux au dépouillement des données, la rigueur de son esprit scientifique m'aura toujours aidé à obtenir le maximum des études que j'ai pu mettre en place au cours de ces années de thèse. De plus, il aura été de ce manuscrit le lecteur bienveillant et exigeant dont tout aspirant au doctorat devrait bénéficier. Ma dette envers lui est immense, ses innombrables relectures m'auront permis d'obtenir le maximum de mes expériences et d'apprendre énormément quant à l'esprit et à la rédaction scientifiques.

Ce manuscrit aura été également relu attentivement par Jeannine et Alain VILLEROT, dont les yeux entraînés auront découvert toutes les fautes d'orthographe, les violences à la grammaire et les impropriétés syntaxiques – du moins toutes celles que je n'aurai pas ajoutées *après* leurs corrections ! Sébastien MERLET, qui travaille sur l'expérience sœur de la balance du watt, m'aura permis également d'ajouter de la clarté à mon manuscrit : par ailleurs, son exigence et sa culture scientifique m'auront été plus d'une fois d'une grande aide. De même, je suis redevable à Alexandra DELVALLÉE et Alexandre BOUNOUH pour les relectures critiques qu'ils ont bien voulu consacrer aux premières versions du manuscrit, alors bien indigestes.

J'aimerais également remercier Ali-Laurent EICHENBERGER et Richard DAVIS qui ont accepté d'examiner mon travail et d'en être les rapporteurs. Leurs remarques ont contribué à l'enrichissement et l'amélioration de ce travail. Je remercie également François NEZ et Daniel ESTÈVE de m'avoir fait l'honneur d'être respectivement examinateur et président du jury de la soutenance de ma thèse.

Mes amis, ma famille, ma compagne ont tous su – et au premier ordre les plus proches ! – m'accorder encouragement, soutien, et compréhension aux moments adéquats au cours du long chemin qui s'étend de l'envoi d'une lettre de motivation à la remise définitive du manuscrit de thèse.

Je remercie également Stéphane GUÉRANDEL, responsable d'une expérience à l'étude de laquelle j'avais postulé : un candidat étant déjà sélectionné, il a alors transmis mes références à une personne susceptible d'être intéressé par ma candidature – Gérard Genevès –, responsable d'un projet dont j'ignorais alors l'existence.

Les erreurs qui subsistent dans ce manuscrit sont les miennes, mais tous les personnes qui m'ont aidé – celles citées nommément dans ces lignes, mais également les autres – m'ont à différents degrés, permis de mener à bien les meilleurs travaux qu'il m'était possible.

Merci à tous.

*Trappes, le 1<sup>er</sup> octobre 2015*



---

# Résumé

---

Dans l'optique d'une modification du SI<sup>1</sup> fondée sur la valeur de constantes fondamentales de la physique, le LCM-LNE/CNAM<sup>2</sup> a développé une expérience de balance du watt, de manière à participer à la redéfinition de l'unité de masse : le kilogramme. Cette unité est en effet la dernière des unités de base du SI qui repose encore sur un artefact matériel : le prototype international du kilogramme.

Une bobine, plongée dans un flux magnétique est le cœur du dispositif de la balance du watt. Elle permet la comparaison d'une puissance électrique et d'une puissance mécanique virtuelles. La détermination des grandeurs électriques par comparaison à l'effet Josephson et à l'effet Hall quantique permet alors d'établir une relation entre une masse macroscopique et la constante de Planck.

Après une dizaine d'années de développements séparés des différents éléments, de très nombreuses caractérisations et améliorations, les premiers travaux de cette thèse ont consisté en l'assemblage des sous-ensembles de la balance du watt.

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'évaluation des composantes principales d'incertitudes, en particulier à celles qui concernent les problématiques d'alignement : alignement sur la verticale des faisceaux lasers des interféromètres mesurant la vitesse de la bobine, alignement sur l'horizontale des pivots du comparateur de forces ; enfin à l'évaluation des forces de Laplace horizontales et des moments parasites s'exerçant sur la bobine et à leurs influences sur la détermination de la constante de Planck.

Une valeur de la constante de Planck a été déterminée à l'été 2014, qui conduit à  $h = 6,626\,068\,8(20) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , évaluation dont l'incertitude-type relative est  $3,1 \times 10^{-7}$ . Des propositions pour améliorer cette incertitude sont avancées.

*MOTS CLEFS.* — Métrologie, balance du watt, constante de Planck, Système international, kilogramme, forces.

---

1. Système international d'unités.

2. Laboratoire commun de métrologie (LCM) : laboratoire commun au Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE) et au Conservatoire national des arts et métiers (CNAM).



---

# Abstract

---

In the view of a forthcoming modification of the SI<sup>2</sup> based on value of fundamental constants of physics, the LCM-LNE/CNAM<sup>3</sup> has developped a watt balance experiment to contribute to the redefinition of the unit of mass : the kilogram. Indeed, this unit is the last of the base units of the SI based on a material artefact namely the international prototype of kilogram.

A coil, immersed in a radial and horizontal magnetic flux is the centre of the watt balance device. It allows to compare virtual electric and mechanical powers. The determination of electrical quantities referenced to the Josephson effect and the quantum Hall effect establishes a relationship between a macroscopic mass and the Planck constant.

After separate developments of the different elements with on going characterizations and improvements, the entire system has been assembled. The first work of this thesis consisted in the assembly of subcomponents of the watt balance.

Thereafter, we evaluated the main components of uncertainties, especially those related to alignment : alignment relative to the vertical of the laser beam interferometers which measure the velocity of the coil, alignment with respect to the horizontal of the pivots from the beam of the force comparator and finally the evaluation of horizontal Laplace forces and parasitic moments acting on the coil and their influences on determining Planck's constant.

A determination of the Planck constant was then carried out in the summer of 2014, which gave  $h = 6,626\,068\,8(20) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ . The relative standard uncertainty associated is  $3,1 \times 10^{-7}$ . Suggestions to improve this uncertainty are given.

**KEY WORDS.** — Métrology, watt balance, Planck constant, Système international, forces, kilogram.

---

2. Système international d'unités.

3. The Laboratoire commun de métrologie (LCM) is a joint metrology laboratory set up between the Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE) and the Conservatoire national des arts et métiers (CNAM).



---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des acronymes et abréviations</b>	<b>xv</b>
<b>Liste des symboles</b>	<b>xvii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xxvi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xxvii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte métrologique</b>	<b>5</b>
1.1 Vers une nouvelle définition du kilogramme.....	5
1.1.1 Problématiques liées à la définition actuelle du kilo- gramme.....	6
1.1.2 Raccordement du kilogramme à une constante fon- damentale .....	9
1.2 Les mesures de la constante de Planck.....	12
1.2.1 Sphères de silicium .....	12
1.2.2 Balances du watt .....	15
1.3 Plan du manuscrit .....	33
<b>2 Description de la balance du watt</b>	<b>37</b>
2.1 Dispositif expérimental .....	37
2.1.1 Locaux .....	37
2.1.2 Structure .....	39
2.1.3 Dispositif de guidage .....	41
2.1.4 Comparateur de forces .....	44



2.1.5	Circuit magnétique et bobine.....	50
2.1.6	Échangeur de masse .....	54
2.1.7	Poids .....	54
2.2	Instrumentation.....	56
2.2.1	Mesures de tension et d'intensité .....	56
2.2.2	Asservissement de la position du fléau .....	56
2.2.3	Mesures de vitesse et de position de la bobine .....	58
2.2.4	Synchronisation des mesures de tension et de fréquence .....	62
2.3	Conclusion .....	65
<b>3</b>	<b>Caractérisations préliminaires</b>	<b>69</b>
3.1	Force parasite magnétique.....	70
3.1.1	Détermination .....	70
3.1.2	Incertitudes .....	72
3.1.3	Conclusion .....	73
3.2	Verticalité des faisceaux des interféromètres.....	73
3.3	Fléau du comparateur de forces.....	77
3.3.1	Détermination de l'inclinaison du fléau sur l'horizontale .....	79
3.3.2	Différence d'altitude des pivots .....	80
3.3.3	Conclusion .....	90
3.4	Capteurs de position .....	91
3.4.1	Position du problème .....	91
3.4.2	Principe et théorie.....	92
3.4.3	Démonstration antérieure à cette thèse .....	94
3.4.4	Caractérisation <i>in situ</i> des capteurs gaussiens à deux faisceaux.....	94
3.4.5	Simplification des capteurs de position .....	97
3.4.6	Étalonnage .....	100
3.4.7	Conclusion .....	103
<b>4</b>	<b>Forces et moments parasites en phase statique</b>	<b>105</b>
4.1	Position du problème.....	105
4.2	Dispositif expérimental .....	106
4.2.1	Masse posée, masse levée, masses équilibrées .....	107
4.2.2	Détecteurs.....	107
4.2.3	Translation et inclinaison de la bobine .....	108
4.3	Analyse des comportements de la bobine et du fléau .....	109
4.3.1	Mise en évidence du mouvement de lacet du fléau ...	109
4.3.2	Interprétation : modèle du fléau.....	110
4.3.3	Adaptation du modèle du double pendule au mouvement de lacet du fléau.....	117
4.3.4	Comparaison des deux modèles .....	120

4.4	Minimisation du déplacement de la suspension .....	126
4.4.1	Position stabilisée de la bobine et du fléau .....	126
4.4.2	Minimisation du déplacement de la suspension .....	128
4.5	Forces et moments parasites impliqués dans la détermination de la constante de Planck.....	131
4.6	Conclusion.....	132
<b>5</b>	<b>Détermination de la valeur de la constante de Planck</b>	<b>135</b>
5.1	Données environnementales .....	135
5.2	Résultats .....	136
5.2.1	Phase dynamique.....	136
5.2.2	Phase statique .....	139
5.2.3	Détermination de la valeur de la constante de Planck	141
5.3	Incertitudes et discussions.....	142
5.3.1	Incertitude de type A .....	143
5.3.2	Mesures de tension.....	143
5.3.3	Phase statique .....	144
5.3.4	Phase dynamique.....	147
5.3.5	Erreur de puissance .....	147
5.4	Conclusion.....	148
	<b>Conclusion &amp; perspectives</b>	<b>151</b>
<b>A</b>	<b>Système international d'unités</b>	<b>155</b>
A.1	Le SI en 2015 .....	155
A.2	La proposition de refonte du SI .....	155
<b>B</b>	<b>Caractéristiques métrologiques du codeur linéaire</b>	<b>161</b>
B.1	Dispositif expérimental .....	161
B.2	Justesse du codeur linéaire .....	162
B.3	Microjustesse du codeur linéaire.....	163
B.4	Conclusion.....	164
<b>C</b>	<b>Équations du modèle du double pendule</b>	<b>165</b>
C.1	Description de la suspension et hypothèses simplificatrices .	165
C.1.1	Description de la suspension côté masse .....	165
C.1.2	Hypothèses simplificatrices.....	165
C.2	Le modèle .....	167
<b>D</b>	<b>Liste des publications</b>	<b>173</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>175</b>
	<b>Résumé</b>	<b>198</b>



---

# Liste des acronymes et abréviations

---

BIPM	Bureau international des poids et mesures, Sèvres, France.
BNM	Bureau national de métrologie ; organisme qui pilotait la métrologie française. Ses missions ont été transmises au LNE en 2005.
CAO	Conception assistée par ordinateur.
CGPM	Conférence générale des poids et mesures, organe délibératif de la convention du mètre.
CIPM	Comité international des poids et mesures.
CNAM	Conservatoire national des arts et métiers, Paris, France.
CODATA	Committee on data for science and technology « Comité de données pour la science et la technologie ».
<i>fem</i>	Force électromotrice.
FPGA	Field-programmable gate array « réseau de portes programmables <i>in situ</i> ».
IAC	International Avogadro consortium « Consortium international Avogadro ».
LCIE	Laboratoire commun des industries électriques.
LCM, LCM-LNE/CNAM	Laboratoire commun de métrologie (LCM) : laboratoire commun au Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE) et au Conservatoire national des arts et métiers (CNAM).
LNE	Laboratoire national de métrologie et d'essais, Trappes et Paris, France ; institut national de métrologie français
NBS	National bureau of standards « Bureau national des normes » ; organisme ayant précédé le NIST.

NIM	National institute of metrology « Institut national de métrologie » ; institut national de métrologie chinois.
NIST	National institute of standards and technology « Institut national des normes et de la technologie », Gaithersburg et Boulder, États-Unis ; institut métrologique national des États-unis.
NMIJ	National metrology institute of Japan « Institut national de métrologie japonais ».
METAS	Institut fédéral de métrologie METAS <sup>4</sup> ; institut national de métrologie suisse.
MSL	Measurement standards laboratory « Laboratoire des normes de mesures », Lower Hutt, Nouvelle Zélande ; institut national de métrologie néozélandais.
NPL	National physical laboratory « Laboratoire national de physique », Teddington, Londres, Angleterre ; institut national de métrologie du Royaume-Uni.
NRC	National research council (en français : Conseil national de recherches Canada), Ottawa, Ontario, Canada ; institut national de métrologie canadien.
OFMET	Office national de métrologie ; nom du METAS antérieurement au 31 décembre 2000.
ppm	Partie par million, correspond à un rapport de $10^{-6}$ .
PTB	Physikalisch-Technische Bundesanstalt « Office fédéral de physique et de technique », Brunswick (en allemand <i>Braunschweig</i> ) et Berlin, Allemagne ; institut national de métrologie allemand.
SI	Système international d'unités.
TIA	Time interval analyser « analyseur d'intervalles temporels ».
VCO	Voltage-controlled oscillator « oscillateur contrôlé en tension ».
XRCD	X-ray cristal density measurement « mesure de densité cristalline par rayons X ».

---

4. En allemand, cet institut est désigné par : *Eidgenössisches Institut für Metrologie METAS*, en italien : *Istituto federale di metrologia METAS*, et en romanche : *Institut federal da metrologia METAS*. L'acronyme METAS, utilisé dans toute les langues, signifie *Metrologie und Akkreditierung Schweiz* « office de métrologie et d'accréditation ».

---

# Liste des symboles

---

$(B \cdot \ell)$	Facteur géométrique de l'ensemble bobine – circuit magnétique.
$(B \cdot \ell)_{\text{stat}} = \frac{m \cdot g}{I} = \frac{m \cdot g}{\frac{V}{R}}$	Facteur géométrique de l'ensemble bobine – circuit magnétique mesuré en phase statique.
$(B \cdot \ell)_{\text{dyn}} = (B \cdot \ell)_{\text{dyn}}(z_0)$	Facteur géométrique de l'ensemble bobine – circuit magnétique mesuré en phase dynamique à l'altitude de pesée $z_0$ .
$(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}(z) = \frac{U(z)}{v_z(z)}$	Profil de champ ( <i>i.e.</i> variation verticale du facteur géométrique $(B \cdot \ell)$ lors de la phase dynamique) de l'ensemble bobine – circuit magnétique.
$e$	Différence d'altitude entre le point inférieur de fixation de la lame centrale et les points de fixation supérieur des lames d'extrémité lorsque le fléau supporte les masses $M$ à chacune de ses extrémités. $e = e_r + e_f$ .
$e_r$	Différence d'altitude entre le point inférieur de fixation de la lame centrale et les points de fixation supérieure des lames d'extrémité du fléau. Cette distance est fixée à la construction.
$e_f$	Flèche du fléau sous l'effet des masses $M$ .
$F_x, F_y$	Composantes horizontales de la force de Laplace subies par la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant $I$ .
$F_z$	Composante verticale de la force de Laplace subie par la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant $I$ .
$g$	Accélération de la pesanteur au centre de gravité de la masse étalon $m$ .

$h$	Constante de Planck, la dernière valeur recommandée par l'ajustement CODATA de 2010 est $6,626\,069\,57(29) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , d'incertitude-type relative de $4,4 \times 10^{-8}$ .
$h_{90} = \frac{4}{K_{\text{J-90}}^2 \cdot R_{\text{K-90}}}$	Valeur conventionnelle de la constante de Planck, vaut exactement $6,626\,068\,854 \dots \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ .
$I$	Différence des courants électrique circulant dans la bobine en phase statique équilibrant la masse étalon $m$ par double pesée.
$k_0, k$	Raideur angulaire du pivot $P_0$ et raideur angulaire des pivots $P_1$ et $P_2$ .
$\tilde{\text{K}}$	Désigne le prototype international du kilogramme.
$K$	Raideur angulaire en torsion (mouvement de lacet $\phi$ ) de la lame flexible centrale du fléau.
$K_{\text{J}} = \frac{2e}{h}$	Constante de Josephson, sa valeur déterminée par l'ajustement CODATA 2010 est de $483\,597,870(11) \times 10^9 \text{ Hz} \cdot \text{V}^{-1}$ . Toutefois, son incertitude-type relative dans le SI est considérée égale à $4 \times 10^{-7}$ .
$K_{\text{J-90}}$	Valeur conventionnelle de la constante de Josephson, vaut exactement $483\,597,6 \times 10^9 \text{ Hz} \cdot \text{V}_{90}^{-1}$ .
$\ell$	Longueur totale de conducteur de la bobine.
$l_1, l_2$	Longueur des segments 1 (du cardan $O_1$ au cardan $O_2$ ) et 2 de la suspension (du cardan $O_2$ au centre optique $\lambda$ ).
$l_{1G}, l_{2G}$	Position des centres de masse des segments 1 ( $G_1$ ) et 2 ( $G_2$ ) par rapport au cardan supérieur.
$L_1, L_2$	Longueur du bras du fléau (de pivot à pivot) du comparateur de forces, du côté supportant la suspension de tare (respectivement du côté supportant la suspension bobine).
$L$	Longueur des bras du fléau (de pivot à pivot) du comparateur de forces, en considérant chacun des bras équivalent à l'autre.
$m$	Masse de l'étalon en alacrite, de masse volumique $\rho_{\text{alacrite}}$ .
$m_1, m_2$	Masse des segments 1 et 2 de la suspension.

$M$	Masse identique suspendue à chacune des extrémité du fléau du comparateur de forces (à l'exclusion de la masse étalon $m$ ).
$M_x, M_y, M_z$	Composantes des moments, réduits au centre de masse $G_2$ de la bobine, dus aux forces de Laplace élémentaires subies par la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant $I$ .
$M_{x/E}, M_{y/E}, M_{z/E}$	Composantes des moments, réduits au centre géométrique $E$ du bobinage, dus aux forces de Laplace élémentaires subies par la bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant $I$ .
$n_{\text{air}}$	Indice de réfraction de l'air.
$p$	Distance verticale entre le pivot central du fléau et le pivot supportant la suspension bobine, lorsque le corps du fléau est horizontal ( $\psi = 0$ ).
$P_0, P_1$ et $P_2$	Pivots du fléau : pivot central, pivot supportant la suspension tare, pivot supportant la suspension bobine.
$r_0$ et $r$	Rayon de courbure du pivot $P_0$ et rayon de courbure des pivots $P_1$ et $P_2$ .
$R$	Valeur de la résistance étalon, destinée à mesurer le courant $I$ en phase statique par la chute de tension $V$ qu'il produit à ses bornes.
$R_K = \frac{h}{e^2}$	Constante de von Klitzing, sa valeur déterminée par l'ajustement CODATA 2010 est de $25\,812,807\,443\,4(84) \times 10^9 \, \Omega$ . Toutefois, son incertitude-type relative dans le SI est considérée égale à $1 \times 10^{-7}$ .
$R_{K-90}$	Valeur conventionnelle de la constante de von Klitzing, vaut exactement $25\,812,807 \, \Omega_{90}$ .
$S$	Sensibilité angulaire du fléau.
$u, v, z,$ $\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Positions inconnues du centre géométrique $E$ du bobinage et angles inconnus du plan magnétique du bobinage par rapport au circuit magnétique.
$U$	Tension générée aux bornes de la bobine en phase dynamique par son déplacement dans l'entrefer du circuit magnétique.



$v_x, v_y, v_z,$ $\omega_x, \omega_y, \omega_z$	Vitesses linéaires et angulaires de la bobine lors de la phase dynamique, dans le repère $(x, y, z, \beta_x, \beta_y, \beta_z)$ . Les phases dynamiques étant constituées de descentes et de montées, les vitesses retenues sont la moyenne des valeurs absolues de ces couples de vitesses.
$v_z$	Vitesse verticale de la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique en phase dynamique.
$V$	Différence des chutes de tensions aux bornes de la résistance étalon lors de la phase statique, déterminée par double pesée.
$V_{90}$	Symbole de l'unité de représentation de la tension, fondée sur la valeur conventionnelle de la constante de Josephson $K_{J-90}$ . Elle est représentée en italique pour symboliser son caractère physique.
$x, y, z,$ $\beta_x, \beta_y, \beta_z$	Positions et angles mesurés de la bobine (et de son centre optique $\lambda$ ) au moyen des capteurs gaussiens de position et des interféromètres (ou de capteurs capacitifs les suppléant) lorsqu'elle est parcourue par un courant $I$ . L'axe $z$ est vertical et ascendant, $x, y$ sont horizontaux (l'axe $x$ est parallèle à l'axe longitudinal du fléau et pointe de la lame centrale à la lame supportant la suspension bobine).
$z_0$	Position verticale de la bobine lors des pesées de la phase statique.
$\alpha$	Angle entre l'horizontale et la droite joignant les pivots $P_0$ et $P_2$ du fléau du comparateur de forces.
$\alpha_x, \alpha_y$	Position angulaire angulaire du segment 1 de la suspension.
$\Delta\alpha_x, \Delta\alpha_y$	Déviation angulaire du segment 1 de la suspension, de l'équilibre courant nul à un équilibre où un courant circule dans la bobine.
$\beta_x, \beta_y$	Position angulaire mesurée du segment 2 de la suspension (identique à la position angulaire mesurée de la bobine).
$\Delta\beta_x, \Delta\beta_y$	Déviation angulaire du segment 2 de la suspension (identique à la position angulaire mesurée de la bobine), de l'équilibre courant nul à un équilibre où un courant circule dans la bobine.

$\delta m$	Masse de déséquilibre du fléau (lorsque la masse étalon $m$ et le contrepoids de masse nominale $\frac{m}{2}$ sont ôtés des suspensions).
$\lambda$	Centre optique de la bobine, point dont on détermine le mouvement à l'aide des capteurs de position gaussien et des interféromètres.
$\gamma$	Roulis du corps du fléau.
$\mu$	Masse du fléau.
$\phi$	Lacet du corps du fléau.
$\rho_{\text{air}}$	Masse volumique de l'air dans laquelle est plongé la masse étalon $m$ .
$\rho_{\text{alacrite}}$	Masse volumique de la masse étalon $m$ .
$\psi$	Tangage, inclinaison du corps du fléau sur l'horizontale.
$\Omega_{90}$	Symbole de l'unité de représentation de la résistance, fondée sur la valeur conventionnelle de la constante de von Klitzing $R_{\text{K-90}}$ . Elle est représentée en italique pour symboliser son caractère physique.



---

# Table des figures

---

1.1	Photographie du coffre contenant le prototype international du kilogramme, et prototype international du kilogramme sous trois cloches de verre. ....	7
1.2	Évolution de l'écart de masse des six témoins officiels à la masse du prototype international du kilogramme .....	8
1.3	Évolution de l'incertitude-type relative des valeurs admises des constantes de la physique $c$ , $e$ , $\nu_{Cs}$ , $\alpha$ , $G$ et de $k_B$ .....	10
1.4	Principe d'une balance du watt .....	17
1.5	Représentation des 17 déterminations de constante de Planck décrites dans le chapitre 1 .....	32
2.1	Photographie et schéma des massifs en béton armé des salles gravimétrie et balance du watt .....	39
2.2	Structure de la balance du watt .....	40
2.3	Photographie de la cuve à vide.....	41
2.4	Piètement, couronne et support du circuit magnétique.....	41
2.5	Photographie d'ensemble de la balance du watt du LNE.....	42
2.6	Schéma CAO et photographie du système de translation à lames flexibles .....	43
2.7	Fléau du comparateur de forces et son capteur optique gaussien .....	44
2.8	Schéma du comparateur de forces: fléau et suspensions .....	45
2.9	Vue CAO et photographie du double cardan en situation.....	46
2.10	Principe de la double pesée.....	48
2.11	Photographie du circuit magnétique .....	51
2.12	Coupe radiale du circuit magnétique .....	52
2.13	Mesure de l'intensité du champ d'induction au moyen d'une sonde à effet Hall dans l'entrefer du circuit magnétique.....	53
2.14	Vue CAO de l'échangeur de masse .....	54
2.15	Vue CAO des principaux éléments constituant l'expérience de la balance du watt .....	57
2.16	Position des six capteurs de position sur la bobine et du système de déclenchement vertical .....	59
2.17	Vue photographique du plateau supportant les interféromètres et les collimateurs des capteurs gaussiens .....	60

2.18 Principe de déclenchement des mesures.....	63
3.1 Mesure du champ de fuite du circuit magnétique.....	71
3.2 Principe de la détermination de l'écart à la verticale d'un faisceau laser.....	74
3.3 Utilisation d'un miroir flottant sur du mercure.....	74
3.4 Photographie du miroir flottant dans du mercure et photographie de la lunette astronomique utilisée pour déterminer la déviation angulaire de deux faisceaux .....	75
3.5 Mesures permettant de déterminer l'angle d'un faisceau laser sur la verticale.....	76
3.6 Influence des forces horizontales parallèles à l'axe longitudinal du fléau sur la comparaison de forces .....	78
3.7 Dispositif de mesures permettant d'obtenir les mouvements de tangage, de roulis et de lacet du fléau .....	79
3.8 Vue photographique du berceau du fléau.....	80
3.9 Vue CAO du fléau du comparateur de forces .....	81
3.10 Schéma du comparateur de forces .....	82
3.11 Flexion d'une lame flexible .....	84
3.12 Courbe de sensibilité théorique du fléau en fonction de la position de son centre de masse.....	85
3.13 Courbes expérimentales de sensibilité du fléau.....	88
3.14 Variations de courant mesurées et des écart-types expérimentaux associés en fonction de la position du centre de gravité du fléau .....	89
3.15 Comparaison des courbes de sensibilité expérimentale et théorique du fléau.....	90
3.16 Position relative des centres de rotation du fléau .....	91
3.17 Principe du capteur gaussien double faisceau .....	93
3.18 Réponse en tension du capteur gaussien double faisceau, utilisé en configuration faisceaux convergents .....	94
3.19 Mesure de la réponse du capteur de position à deux faisceaux en configuration faisceaux parallèles.....	95
3.20 Comparaison de la position mesurée d'une fente fixe par un capteur gaussien double faisceau et de la position mesurée par un capteur gaussien simple faisceau .....	96
3.21 Principe du capteur gaussien simple faisceau.....	97
3.22 Principe de la réponse en intensité des capteurs gaussiens simple faisceau .....	98
3.23 Comparaison de la position mesurée d'une fente fixe par un capteur gaussien et de celle mesurée en corrigeant les variations de puissance .....	100
3.24 Diode laser fibrée couplée à un diviseur de fibre, une entrée, huit sorties .....	101

3.25	Vue CAO du dispositif utilisé pour l'étalonnage des capteurs de position.....	101
3.26	Répétabilité des courbes de réponse d'un capteur de position gaussien simple faisceau .....	102
4.1	Pantographe à lames flexibles destiné aux déplacements de la suspension dans le plan horizontal .....	108
4.2	Évolution du mouvement de lacet du fléau en fonction de la position d'un lest sur le pourtour de la bobine .....	109
4.3	Fléau du comparateur de forces comme balance de torsion .....	110
4.4	Les forces et les moments parasites subies par le bobinage annulaire en son centre ne dépendent que de sa position et de son inclinaison dans l'entrefer de l'aimant .....	111
4.5	L'inclinaison $\theta_x$ du plan du bobinage sur plan du circuit magnétique est à l'origine des forces horizontales .....	113
4.6	Mouvement de lacet du fléau en fonction de la somme des angles mesurés de la bobine ( $\beta_x^{mp} + \beta_x^{ml}$ ) en double pesée, lorsqu'un lest est déplacé sur le pourtour de la bobine .....	115
4.7	Schéma de la suspension du double pendule .....	118
4.8	Comparaison des deux modèles pour les évaluations des forces $F_y^{mp}$ et $F_y^{ml}$ en fonction de la position d'un lest .....	122
4.9	Comparaison entre les évaluations des forces $\Delta F_y^{stat}$ effectuées par la méthode du fléau et par la méthode du double pendule en fonction de la position d'un lest .....	123
4.10	Rotation différentielle de la bobine et du fléau lors d'une double pesée.....	124
4.11	Comparaison de l'évolution de l'angle du fléau et de celle de l'angle de la bobine autour de l'axe vertical .....	125
4.12	Évolutions temporelles des positions de la bobine et du fléau, après une nuit de stabilisation .....	126
4.13	Excursion du lacet du fléau lors de la dépose de la masse étalon	128
4.14	Déviations angulaires des deux segments de la suspension lorsque la lame flexible centrale du fléau est traduite.....	130
5.1	Correction sur la masse due à la poussée d'Archimède, correction sur la vitesse due à l'indice de réfraction de l'air, relativement à la valeur de la constante de Planck .....	136
5.2	Mesures de tension ainsi que de vitesse verticale lors d'une descente de la bobine.....	138
5.3	Mesures relatives de tension ainsi que de vitesse verticale lors d'une descente de la bobine, et valeurs relatives du profil de champ .....	139
5.4	Évaluation du profil de champ obtenu par la moyenne des valeurs durant une séquence de 100 trajectoires.....	140

5.5	Séquence de mesures en phase statique .....	140
5.6	Profils de champ $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}$ , cercles rouges, et $(B \cdot \ell)_{\text{stat}}$ , carrés noirs, obtenus pendant l'été 2014 et variation de température du circuit magnétique .....	142
5.7	Ensemble des déterminations de la valeur de constante de Planck obtenues durant l'été 2014 au LNE .....	143
5.8	Représentation de la détermination de la valeur de la constante de Planck par le LNE en 2014, accompagnée des dernières valeurs de la constante de Planck .....	149
A.1	Interdépendance entre les unités de base du SI en 2015 et phénomènes physiques (ou artefact) les définissant .....	158
A.2	Interdépendance entre les unités de base du « nouveau » SI et constantes physiques les définissant .....	159
B.1	Erreur de justesse du codeur linéaire .....	162
B.2	Erreur de micro-justesse du codeur linéaire .....	163
C.1	Simplification de la la suspension côté masse .....	166
C.2	Schéma de la suspension du modèle du double pendule .....	167

---

# Liste des tableaux

---

2.1	Principales caractéristiques de la balance du watt .....	65
3.1	Composantes d’incertitude de l’évaluation de la force magnétique parasite .....	72
3.2	Composantes d’incertitude de la détermination d’une position par un capteur gaussien simple faisceau .....	103
4.1	Expression des forces $F_y^{\text{mp}}$ , $F_y^{\text{ml}}$ et $\Delta F_y^{\text{stat}}$ par le modèle du fléau et le modèle du double pendule.....	121
4.2	Forces et moments parasites estimés lors des phases statiques de la détermination de la constante de Planck .....	132
5.1	Principales sources d’incertitudes liées à la détermination de la constante de Planck .....	144
5.2	Sources d’incertitudes liées à la détermination de la résistance .	145
5.3	Sources d’incertitudes liées à la détermination de la masse .....	145
5.4	Détermination de l’incertitude-type relative liée à l’erreur de puissance.....	148
A.1	Définition des sept unités de base du SI.....	156
A.2	Définition des sept unités de base proposées pour le futur du SI	157
B.1	Incertaince-type sur la mesure d’un déplacement de 1 cm par le codeur linéaire.....	164
C.1	Paramètres numériques du modèle du double pendule .....	168





---

# Introduction

---

L'un des premiers étalons fondé sur la nature (et donc potentiellement universel et stable) est le mètre, qui a été *défini* par la loi du 1<sup>er</sup> vendémiaire an IV (23 septembre 1795), sur une proposition de l'Académie des sciences de 1791, comme la longueur égale à la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre. Cette unité n'était pas définie arbitrairement, mais fondée sur les dimensions de la Terre, dimensions qu'il restait toutefois à établir. Sept années furent nécessaires à Delambre et Méchain pour mener à bien les opérations de triangulation de mesure de l'arc du méridien entre Dunkerque et Barcelone [1]. Ainsi en 1799, un mètre-étalon en platine fut *réalisé*<sup>1</sup> à partir de cette définition.

L'unité de mesure de base étant déterminée, les travaux de Lefèvre-Gineau et Fabbroni permirent de *définir* le kilogramme comme la masse d'un décimètre cube d'eau distillée prise à la température de son maximum de densité (estimée à l'époque à 4 °C) [3]. Ces études permettent la *réalisation*<sup>2</sup> d'un étalon de masse en platine qui fut déposé avec l'étalon du mètre aux Archives nationales de France le 4 messidor an VII (22 juin 1799), ce qui est parfois considéré comme l'acte fondateur du système métrique [5] : en pratique, ces étalons constituèrent une nouvelle définition de l'unité de longueur et de masse.

Cette définition du mètre s'avérera vite assez peu compatible avec les progrès réalisés et avec les besoins de précision du milieu scientifique. Celui-ci s'inquiète déjà des conditions de conservation et de l'accessibilité de ce mètre-étalon. Par ailleurs, cet étalon à bouts rend les mesures comparatives délicates. Quant au kilogramme, des défauts sur la surface de platine font s'inquiéter de sa stabilité [3]. En conséquence, en 1889, la 1<sup>re</sup> CGPM (Conférence générale des poids et mesures) redéfinit le mètre comme étant la distance entre deux points sur une barre d'un alliage de platine iridié et le kilogramme comme la masse

---

1. La circonférence de la Terre est de 40 007,863 km [2]. Le quart de 1/10 000 de la circonférence terrestre mesure 1,000 196 575 m, soit une erreur relative de  $-2 \times 10^{-4}$  entre la définition de 1791 et la réalisation de 1799.

2. La densité d'une eau distillée pure à la pression de 101 325 Pa avec une composition isotopique représentative de la moyenne des océans possède une masse volumique de 999,974 95 kg · m<sup>-3</sup> [4], soit une erreur relative de  $20 \times 10^{-6}$  entre la définition et la réalisation de 1799.

d'un cylindre de platine iridié, le prototype international du kilogramme [6]<sup>3</sup>. Ces deux étalons furent fabriqués de manière à être indiscernables des précédents étalons (continuité des définitions).

Bien que ces définition du mètre et du kilogramme marquèrent une avancée importante dans l'établissement d'un système d'unité stable, l'universalité des unités de mesures était mise en défaut. Cependant, l'émergence des constantes fondamentales de la physique dans la pratique de la métrologie apporta les premières réponses. En effet, les constantes fondamentales étant les grandeurs les plus fixes connues, elles apparaissent comme particulièrement adaptées à la définition d'étalons.

Ainsi, en 1960, la 11<sup>e</sup> CGPM redéfinit une première fois le mètre comme étant un multiple de la longueur d'onde d'une certaine radiation du krypton-86 [8], puis une deuxième fois en 1983 lors de la 17<sup>e</sup> CGPM, comme étant la distance parcourue par la lumière dans le vide en  $1/299\,792\,458$  seconde [9].

Le Système international d'unités (SI) s'est ainsi construit par étapes en établissant des définitions qui n'ont cessé de gagner en précision. Cette tendance est toujours valable de nos jours où le SI tend à évoluer vers un système dématérialisé fondé uniquement sur des constantes fondamentales de la physique, qui sont des grandeurs stables et universelles. Ce processus est en cours pour l'unité de masse.

En effet, le kilogramme est la dernière unité de base du SI qui repose encore sur un artefact matériel, un cylindre de platine iridié dont le diamètre de 39 mm est égal à la hauteur : le prototype international du kilogramme (symbolisé par la lettre  $\tilde{\text{K}}$ ), dont la masse est par définition égale à 1 kg (définition de 1901 [7]).

Cette définition n'est universelle ni dans l'espace, ni dans le temps : il est nécessaire de disposer de  $\tilde{\text{K}}$  pour réaliser l'unité de masse et  $\tilde{\text{K}}$  ne peut être remplacé par un autre prototype (en cas d'usure ou de destruction). Une éventuelle dérive absolue de sa masse est inaccessible par définition même.

Cette situation problématique dans le domaine des masses l'est également pour les unités qui reposent sur la définition du kilogramme : la mole, le candela et surtout l'ampère et donc les unités électriques. Pour des raisons de disponibilité, de pérennité et d'universalité du kilogramme et des unités qui en dépendent, il est donc indispensable d'en changer la définition.

Les faiblesses de la définition de l'unité de masse pourraient être circonvenues en raccordant la masse à une ou plusieurs constantes physiques fondamentales [10].

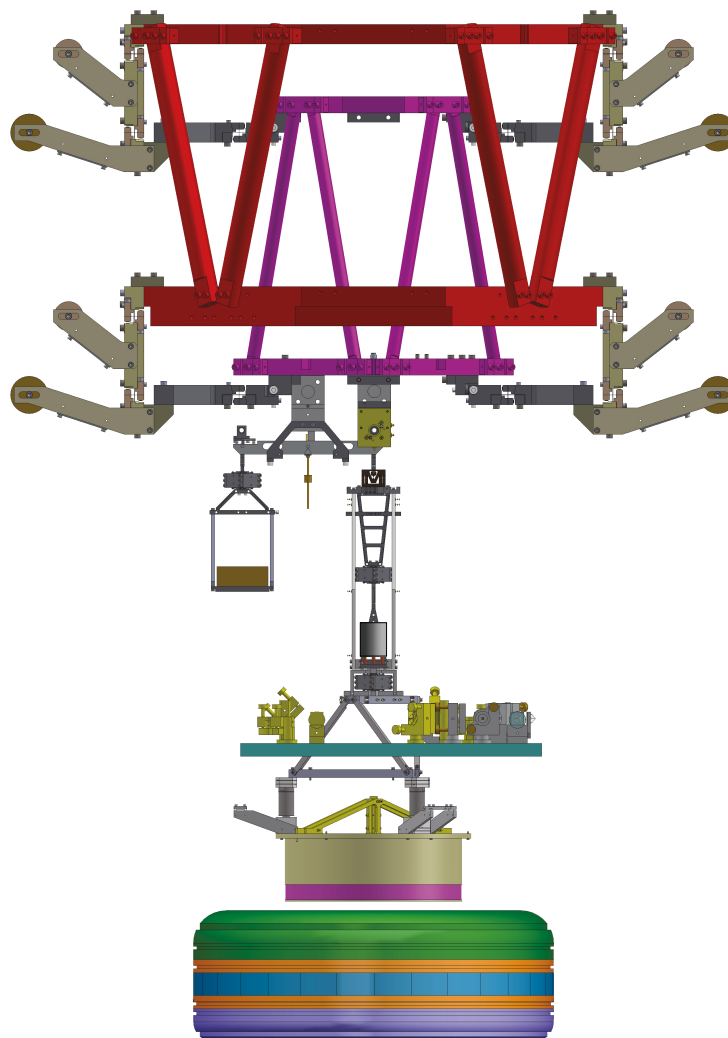
Dans l'optique d'une modification globale du Système international d'unités (SI) fondée sur la valeur de constantes fondamentales de la physique [11], le LCM-LNE/CNAM<sup>4</sup> a développé une expérience de balance du watt à partir de l'année 2000, de manière à participer à la redéfinition de l'unité de masse.

3. La définition actuelle de l'unité de masse est fixée en 1901 [7]. Elle reprend et clarifie la définition de l'unité de masse de la 1<sup>re</sup> CGPM.

4. Laboratoire commun de métrologie (LCM) : laboratoire commun du Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE) et du Conservatoire national des arts et métiers (CNAM).

Cet objectif requiert une méthode pour relier une masse *macroscopique* à des constantes fondamentales. Cela peut être réalisé en utilisant une balance du watt qui repose sur deux effets quantiques (l'effet Josephson et l'effet Hall quantique), pour relier des masses macroscopiques à la constante de Planck  $h$ , à la vitesse de la lumière et enfin à la fréquence de la transition entre deux niveaux de la structure hyperfine du césium-133.

Nous débuterons ce manuscrit par le développement des problématiques du Système international d'unités et en particulier celles concernant le kilogramme. L'exposé du principe de la balance du watt pour la détermination de la valeur de la constante de Planck conduira ensuite à l'équation de la détermination de la valeur de  $h$ . Cette équation permettra alors de détailler l'organisation du texte et de conclure le chapitre 1. Les premiers travaux de cette thèse ont consisté en l'assemblage des sous-ensembles de la balance du watt : les plus significatifs sont décrits au chapitre 2. Ensuite, le chapitre 3 présente les caractérisations préliminaires à la détermination des termes d'erreur de l'évaluation de la constante de Planck. Le chapitre 4 étudie tout particulièrement les forces et moments parasites s'exerçant sur la bobine de la balance du watt en phase statique. Enfin, une valeur de la constante de Planck a été déterminée à l'été 2014. Cette évaluation, de même que le calcul d'incertitude correspondant sont donnés au chapitre 5.



*Après un rappel de l'état présent de la connaissance de l'unité de masse (section 1.1.1), nous récapitulons les arguments en faveur du raccordement du kilogramme à la valeur de la constante de Planck  $h$  (section 1.1.2). Le principe de mesure de la constante de Planck par une sphère de silicium (section 1.2.1) et par une balance du watt<sup>\*</sup> (section 1.2.2) est donné, de même qu'un historique des résultats obtenus. Par ailleurs, le principe de la mesure pratique d'une masse macroscopique en terme de  $h$  est donné (section 1.2.2.1, paragraphe f)*

---

<sup>\*</sup>. La figure illustrant cette tête de chapitre représente la plupart des éléments de la balance du watt du LNE qui seront tous décrits dans la suite de ce manuscrit. Elle sera rappelée et complétée pour chacun des chapitres suivants.

---

# Chapitre 1

## Contexte métrologique

---

Les constantes fondamentales de la physique, dont un panorama très complet est décrit par Uzan et Lehoucq dans [12], sont considérées invariantes dans le temps et dans l'espace. Elles ne peuvent s'exprimer en fonction d'autres grandeurs physiques et sont liées à la connaissance, à un instant donné, des phénomènes qu'elles caractérisent.

Il peut être possible de modifier les définitions des unités de base du SI dans le cadre d'une réflexion globale sur le rapport entre les unités et les constantes fondamentales [11, 13, 14], faisant ainsi se rejoindre la physique théorique et la physique expérimentale.

Il serait possible de remédier aux faiblesses de la définition du kilogramme, la dernière des unités de base du SI qui repose encore sur un artefact matériel, en raccordant la masse à une ou plusieurs constantes physiques fondamentales [11]. La modification de la définition du kilogramme s'inscrirait alors dans une redéfinition globale des unités du SI, permettant d'élaborer un système d'unités reposant entièrement sur des constantes fondamentales.

### 1.1 Vers une nouvelle définition du kilogramme

Le Système international d'unités<sup>1</sup> (SI), créé en 1960 [8, 16], comporte sept unités de base<sup>2</sup> : le kilogramme (grandeur masse), le mètre (grandeur longueur), la seconde (grandeur temps), l'ampère (grandeur courant électrique), le kelvin (grandeur température thermodynamique), la mole (grandeur quantité de matière) et la candela (grandeur intensité lumineuse) ; il comporte également des unités dérivées formées des produits des puissances des unités

---

1. Un historique de la mesure et des systèmes précédants le SI est donné par Himbert [15], on pourra également consulter la « brochure SI » [5] pour une description de l'établissement du SI, de même que pour l'organisation mondiale de la métrologie.

2. Les définitions des unités de base sont rappelées dans la TABLE A.1 page 156, et Quinn [17] a effectué une description du SI, accompagnée de discussions sur les réalisations pratiques de chaque unité de base.

de base. Celles-ci, conventionnellement considérées comme indépendantes (d'un point de vue dimensionnel), sont définies de manière à rendre le système cohérent<sup>3</sup> y compris pour les unités dérivées.

### 1.1.1 Problématiques liées à la définition actuelle du kilogramme

Un historique détaillé de la naissance du kilogramme a été donné par Marquet [3]: il s'agit de la dernière des sept unités de base [5] du Système international d'unités qui soit encore matérialisée par un artefact<sup>4</sup> matériel, le prototype international du kilogramme sanctionné par la 1<sup>re</sup> CGPM [6], l'organe délibératif de la Convention du mètre. Il s'agit d'un cylindre de platine iridié, fabriqué par la société anglaise Johnson Matthey en 1878, qui est composé de 90 % de platine et de 10 % d'iridium. Son diamètre de 39 mm est égal à sa hauteur. Il est conservé au Bureau international des poids et mesures (BIPM) dans l'air (FIGURE 1.1) sous 3 cloches de verre<sup>5</sup>. Le prototype international du kilogramme, dont un historique complet a été publié par Plassa [20], est symbolisé par la lettre  $\mathfrak{K}$  [6]<sup>6</sup>.

Afin de faire cesser l'ambiguïté qui existait dans l'usage courant sur le terme « poids », la troisième CGPM en 1901 confirma que

Le kilogramme est l'unité de masse; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme [7].

Il en résulte que la masse du prototype international du kilogramme, notée  $m(\mathfrak{K})$ , est par définition toujours égale à 1 kg exactement :

$$m(\mathfrak{K}) = 1 \text{ kg.} \quad (1.1)$$

La définition et la réalisation de l'unité de masse kilogramme sont donc confondues dans l'artefact  $\mathfrak{K}$ . Cette confusion renvoie à plusieurs problématiques [22]:

La maîtrise des conditions de conservation du prototype international du kilogramme est nécessaire pour contrôler sa stabilité à long terme. Ceci implique notamment d'utiliser la méthode de nettoyage « type BIPM » (nettoyage lavage utilisant des solvants éther, éthanol, eau [23, 24] ) pour ôter de

3. « Le mot cohérent est utilisé ici dans le sens suivant: lorsque l'on utilise des unités cohérentes, les équations reliant les valeurs numériques des grandeurs prennent exactement la même forme que les équations reliant les grandeurs proprement dites. Ainsi, si on utilise uniquement des unités d'un système cohérent, on n'a jamais besoin de facteurs de conversion entre les unités » [5].

4. « La distinction entre objets artificiels et objets naturels paraît à chacun de nous immédiate et sans ambiguïté. Rocher, montagne, fleuve ou nuage sont des objets naturels; un couteau, un mouchoir, une automobile, sont des objets artificiels, des artefacts » [18].

5. Contrairement à ce que stipulait la 1<sup>re</sup> CGPM [6] qui mentionnait un « vide partiel » – d'où la présence du robinet sur la cloche externe, visible FIGURE 1.1 – la conservation dans l'air ambiant fut rétabli à une date proche quoiqu'indéterminée de l'arrivée de  $\mathfrak{K}$  au BIPM [19].

6. De même que le prototype international du mètre était alors symbolisé par la lettre  $\mathfrak{M}$ .



FIGURE 1.1 – *Figure gauche* : Coffre contenant le prototype international du kilogramme, conservé dans l'air au BIPM sous 3 cloches de verre ainsi que ses 6 copies officielles. Figure issue de [14]. *Figure droite* : Copie du prototype international du kilogramme  $\tilde{K}$ . Figure issue de [21].

la surface du prototype international du kilogramme (ainsi que des autres prototypes) les inévitables contaminations de surface [25].

La définition même n'est universelle ni dans l'espace, ni dans le temps : il est nécessaire de disposer de  $\tilde{K}$  pour réaliser l'unité de masse et  $\tilde{K}$  ne peut être remplacé par un autre prototype (en cas d'usure ou de destruction).

L'unicité de référence (sa disponibilité en un seul lieu) rend la vérification des quelques soixante prototypes nationaux<sup>7</sup> possible seulement s'ils sont tous rassemblés au BIPM pour une durée de 2 ou 3 années. Ces vérifications « ordinaires » n'ont donc lieu que tous les cinquante ans environ : distribution et certification des prototypes en 1889 [6], seconde vérification périodique en 1946-1953 [27], troisième vérification périodique en 1989 [26]. Une vérification extraordinaire a eu lieu en 2014<sup>8</sup>, en prévision de la refonte du SI qui requiert que les masses utilisées comme référence des expériences de balance du watt ou de XRCD<sup>9</sup> soient étalonnées de la manière la plus directe possible au prototype international du kilogramme [30].

7. Par tirage au sort [6], à la France échet le prototype 35. Quatre organismes scientifiques français obtinrent par ailleurs les prototypes 13, 17, 25 et 34 dont certains furent dispersés [26].

8. Non encore publiée. Des éléments sont néanmoins accessibles [28, 29].

9. X-ray cristal density measurement « mesure de densité cristalline par rayons X ».



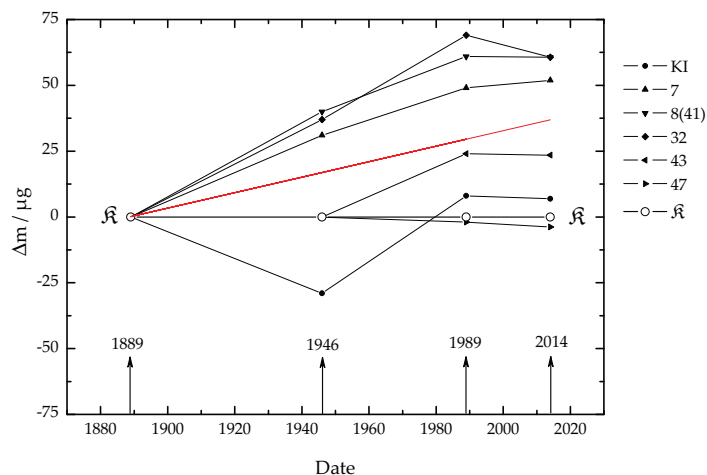


FIGURE 1.2 – Évolution de l'écart de masse des six témoins officiels (KI, 7, 8(41), 32, 43 et 47) à la masse du prototype international du kilogramme ( $\hat{K}$ ). La droite rouge, régression linéaire des données, présente une pente de  $3 \mu\text{g}/\text{an}$ . Données issues de [26, 28].

Ces vérifications périodiques entre le prototype international du kilogramme et les six témoins<sup>10</sup> conservés dans les mêmes conditions que  $\hat{K}$  montrent des divergences d'évolution dans le temps (FIGURE 1.2). La dispersion de l'évolution relative de ces six étalons de masse sur un siècle est de l'ordre de  $5 \times 10^{-8}$  et même de  $1 \times 10^{-7}$  si on considère l'ensemble des étalons nationaux. Enfin, la dérive différentielle relative entre les six témoins et  $\hat{K}$  est de  $3 \times 10^{-8}$  : la dérive absolue de masse du prototype international du kilogramme, à jamais inaccessible par définition même, pourrait être plus importante [31, 32].

Le fait de voir l'écart de masse entre les six témoins et le prototype international du kilogramme évoluer est un indice fort de l'évolution de la masse de  $\hat{K}$  par rapport à une référence stable, comme la masse d'une particule. Alors, à prendre la définition de l'unité de masse, on arrive à la conclusion que la masse du prototype international du kilogramme,  $m(\hat{K})$ , ne varie pas, tandis que la masse d'un électron par exemple dans le SI, variera au cours des prochaines décennies : cela est *a minima* insatisfaisant. De plus, la tendance à

10. En 1889, le prototype international du kilogramme fut stocké au BIPM avec deux copies officielles (les prototypes KI et 1, les « témoins » ou « copies officielles »). Le prototype 1 fut remplacé par le 7 après une chute en 1925. En 1905, les prototypes 8(41) et 32 furent désignés copies officielles. En 1939, les prototypes 43 et 47 furent à leur tour désignés copies officielles [26].

l'accroissement de masse des copies officielles<sup>11</sup> (relativement à  $\mathfrak{K}$ ) observée durant les 3 premières vérifications (1889, 1946, 1988–1992) n'a pas été confirmée par la dernière vérification : ces résultats montrent que la différence de masse entre  $\mathfrak{K}$  et ses copies officielles n'a changé en moyenne que de 1  $\mu\text{g}$ .

En sus de l'arrêt de la dérive observée précédemment, l'unité de masse maintenue au BIPM a été déterminée comme erronée de 35  $\mu\text{g}$  [29] relativement à la masse de  $\mathfrak{K}$  (soit  $3,5 \times 10^{-8}$  en valeur relative). L'évolution de ce décalage dans le temps (de 1992 à 2014) a été modélisée en supposant une diminution de masse des prototypes proportionnelle au nombre de pesées dans les comparateurs de masse. Les corrections sur les valeurs des étalons nationaux ont été calculées *a posteriori*. L'incertitude-type associée a été déterminée à 3  $\mu\text{g}$  et l'ensemble de ces informations transmises aux instituts nationaux de métrologie (INM) à la fin 2014.

Cette situation problématique dans le domaine des masses l'est également pour les unités qui en dépendent : la mole, le candela et surtout l'ampère [16, 35, 36] et donc les unités électriques. En effet, bien que les grandeurs de base soient, par convention, considérées comme indépendantes, l'examen de leur définition montre que certaines d'entre elles sont liées (TABLE A.1 page 156 et FIGURE A.1 page 158). C'est en particulier le cas de l'ampère dont la définition fait intervenir une force s'exprimant elle-même en fonction du mètre, du kilogramme et de la seconde. Pour des raisons de disponibilité, de pérennité et d'universalité du kilogramme et des unités qui en dépendent, il est donc indispensable d'en changer la définition.

### 1.1.2 Raccordement du kilogramme à une constante fondamentale

Considérant la faiblesse de la plupart des définitions actuelles du SI – dont celle du kilogramme –, des recommandations successives de la CGPM dès 1995 encouragent à « poursuivre les expériences appropriées afin que le Comité international puisse juger s'il est possible ou non de redéfinir le kilogramme, l'ampère, le kelvin et la mole en utilisant des valeurs fixées pour certaines constantes fondamentales » [37–39].

---

11. Cinquante microgrammes, la variation de l'écart de masse entre  $\mathfrak{K}$  et l'ensemble de ses témoins, représentent environ la masse d'une empreinte digitale. Des essais conduits au BIPM en 1946 ont permis de conclure qu'un nettoyage, même vigoureux, à la peau de chamois n'altère pas les masses des prototypes. Des essais plus récents au moyen de la balance NBS-2 sur le prototype 63 ont démontré une stabilité de 2  $\mu\text{g}$  [23].

De nombreuses théories – jusqu'à présent non confirmées – ont été proposées pour expliquer la divergence de masse des témoins et de  $\mathfrak{K}$ . L'une d'elles suppose que le changement relatif de masse pourrait être dû à un accroissement plus rapide de la masse des témoins que celle du prototype international du kilogramme.  $\mathfrak{K}$  est stocké sous trois cloches de verres, alors que les témoins et les prototypes nationaux sous deux : le platine ayant une forte affinité avec le mercure [33, 34], le prototype international du kilogramme serait le moins touché par la pollution au mercure de l'atmosphère.

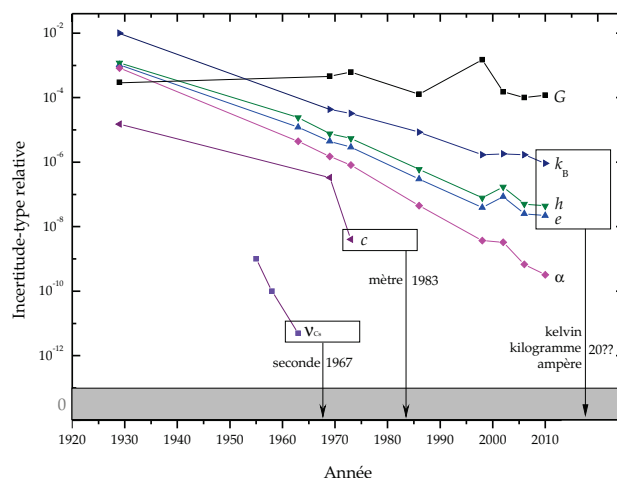


FIGURE 1.3 – Évolution de l'incertitude-type relative des valeurs admises de la vitesse de la lumière dans le vide  $c$ , de la constante de Planck  $h$ , de la charge élémentaire  $e$  de la constante de structure fine du césium-133  $\nu_{\text{Cs}}$ , de la constante de structure fine  $\alpha$ , de la constante de Newton  $G$  et de la constante de Boltzmann  $k_B$ . Les constantes  $c$  et  $\nu_{\text{Cs}}$  servent actuellement de définition pour le mètre et la seconde. Les constantes  $k_B$ ,  $h$  et  $e$  serviront dans un avenir proche à définir le kelvin, le kilogramme et l'ampère. Données établies à partir de [43–51] ; pour la constante de structure fine du césium-133, à partir de [52–55].

C'est un désir ancien que ce souhait de l'universalité de la définition des unités de mesure par l'utilisation de constantes fondamentales : par exemple Maxwell en 1870 suggérait [40] d'utiliser un système d'unités définies à partir des propriétés intrinsèques des atomes ou molécules, système qui aurait satisfait aux critères d'universalité plus tard énoncés par Planck [41].

La robustesse du kilogramme pourrait être améliorée en raccordant sa définition à une ou plusieurs constantes physiques fondamentales [11].

### 1.1.2.1 Deux unités déjà raccordées

La seconde [42] en 1967 et le mètre [9] en 1983 (FIGURE 1.3) ont été définis à partir de constantes fondamentales ou de phénomènes quantiques reproductibles (respectivement la célérité de la lumière dans le vide,  $c$ , et la fréquence de transition hyperfine du césium-133,  $\nu(^{133}\text{Cs})_{\text{hfs}} = \nu_{\text{Cs}}$ ).

Ces unités sont donc indépendantes de tout artefact matériel et leur mise en pratique peut être réalisée par tout laboratoire disposant de l'équipement nécessaire. Le mètre et la seconde sont à l'heure actuelle les seules unités dont la définition est établie à l'aide d'une propriété atomique ou d'une constante fondamentale. En effet, l'ampère [35] en 1948 est défini à partir d'une valeur fixée de la permittivité du vide,  $\mu_0$ , mais dépend de la définition de la seconde et du kilogramme (TABLE A.1 page 156). Par la dépendance au kilogramme,

la définition de l'ampère ne repose donc pas entièrement sur des constantes fondamentales ou quantiques.

### 1.1.2.2 Quelle constante fondamentale choisir pour le kilogramme ?

Des principes physiques variés, comme le comptage d'ions [56] ou encore la lévitation d'une masse supraconductrice [57, 58] ont été envisagés pour ce lien entre kilogramme et une ou plusieurs constantes fondamentales.

Après des réflexions sur les nouvelles définitions, et sur le choix des constantes qu'il serait le plus pertinent de fixer [10, 59, 60], et bien qu'une définition fondée sur la constante d'Avogadro  $N_A$  [61] – selon laquelle le kilogramme serait constitué d'un nombre donné d'atomes – soit conceptuellement simple, un consensus se dégage pour déterminer le kilogramme à partir de la valeur de la constante de Planck [62] pour les raisons suivantes :

- Le rôle de la constante de Planck est plus important que celui de la constante d'Avogadro :  $h$  est la constante centrale de la mécanique quantique comme  $c$  est celle de la relativité ;
- Fixer  $h$  indépendamment de  $N_A$  permet de définir la mole comme une quantité de matière, grandeur indépendante de la masse ;
- Enfin, fixer la valeur de la constante de Planck,  $h$ , et la valeur de la charge élémentaire,  $e$ , implique [10] que la constante de Josephson et la constante de von Klitzing auront des valeurs exactes dans le SI. Sous réserve d'accepter leurs expressions théoriques<sup>12</sup> (respectivement  $\frac{2e}{h}$  et  $\frac{h}{e^2}$ ), toutes les mesures électriques verraient alors leurs incertitudes diminuer dans le SI.

La modification de la définition du kilogramme s'inscrirait alors dans une redéfinition globale des unités du SI, permettant d'élaborer un système d'unités reposant entièrement sur des constantes fondamentales.

### 1.1.2.3 Nouvelle définition du kilogramme

La 24<sup>e</sup> CGPM [63] en 2011 propose une nouvelle définition à constante explicite pour le kilogramme (mais avec une valeur à préciser pour la constante de Planck), de même que pour les autres unités de base, et cela dans le cadre d'une refonte globale des définitions des unités de base du SI, définies à constantes explicites [62] :

Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse ; son amplitude est déterminée en fixant la valeur numérique de la constante de Planck à exactement  $6,626\,06 \dots \times 10^{-34}$  lorsqu'elle est exprimée en  $\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , unité du SI égale au joule seconde, J · s.

---

<sup>12</sup>. Au sujet de la métrologie électrique et des constantes de von Klitzing et de Josephson, voir le paragraphe d de la section 1.2.2.1.

Cependant, lors de sa 25<sup>e</sup> session en 2014, l'assemblée constate que « malgré les progrès effectués, les données disponibles ne semblent pas encore suffisamment robustes pour que la CGPM adopte le SI révisé » [64].

En effet, les conditions sur les valeurs de constante de Planck exigées par le CIPM avant de procéder à une redéfinition du kilogramme s'appuyant sur une valeur de  $h$  fournie par CODATA, sont notamment que trois expériences indépendantes (incluant des balances du watt [65] et des expériences de sphère de silicium [66], les expériences les plus prometteuses en termes d'incertitudes) permettent d'obtenir des valeurs cohérentes de la constante de Planck, avec des incertitudes-types relatives qui ne soient pas supérieures à  $5 \times 10^{-8}$  et dont l'une au moins possèderait une incertitude relative standard qui ne soit pas supérieure à  $2 \times 10^{-8}$  [30].

Une telle exigence sur les niveaux d'incertitude est en effet le seul moyen de garantir la continuité historique de la valeur du kilogramme, de même qu'elle est le seul moyen pour que cette redéfinition n'entraîne pas d'écart significatif sur la valeur des étalons des classes d'exactitudes les plus élevées ( $E_1$ ) en métrologie légale : autrement dit, il est nécessaire de pouvoir étalonner des masses en acier inoxydable avec une incertitude-type relative inférieure à  $8 \times 10^{-8}$  sur des masses de 1 kg [67].

Au jour du changement de définition, la masse du prototype international du kilogramme,  $m(\tilde{\text{K}})$ , sera d'un kilogramme avec une incertitude relative égale à celle de la valeur recommandée de  $h$  par CODATA juste avant cette redéfinition. La masse du prototype international du kilogramme devra ensuite être déterminée expérimentalement. Si cette détermination était renouvelée durant quelques dizaines d'années, il serait possible de connaître la dérive absolue de  $\tilde{\text{K}}$ .

## 1.2 Les mesures de la constante de Planck

Depuis le début du XX<sup>e</sup> siècle, de nombreuses approches ont été utilisées pour déterminer la valeur de la constante de Planck : un historique très complet des déterminations de la constante de Planck a été donné par Steiner en 2013 [68].

Les expériences permettant de déterminer la valeur de la constante de Planck les plus prometteuses en termes d'incertitude sont les expériences de balance du watt et l'analyse d'un monocristal de silicium.

### 1.2.1 Sphères de silicium

La mesure de la constante d'Avogadro a une histoire qui débute avec celle de la chimie, comme décrit par Becker [69]. La technique employée de nos jours est généralement désignée par XRCD (X-ray cristal density measurement « mesure de densité cristalline par rayons X ») ou par sphère de silicium, termes utilisés ici indifféremment et s'applique à des sphères issues d'un monocristal de silicium.

### 1.2.1.1 Principe de la mesure

La constante d'Avogadro peut se définir comme le rapport entre le volume molaire  $V_{\text{mol}}$  et le volume atomique  $V_{\text{a}}$ . Le volume molaire est le produit de la masse molaire  $M_{\text{mol}}$  du silicium et du volume  $V$  du cristal, divisé par la masse  $m$  de celui-ci. Le volume atomique est, dans un monocristal de type diamant cubique à faces centrées où l'on note  $d_{220}$  la distance entre les plans de Miller  $\{220\}$  du réseau cristallin, le volume d'une maille élémentaire divisée par le nombre d'atomes  $n$  contenus dans cette maille (8 dans le cas du cristal de silicium). On a donc :

$$N_{\text{A}} = \frac{V_{\text{mol}}}{V_{\text{a}}} = \frac{n \cdot M_{\text{mol}} \cdot V}{m \cdot d_{220}^3} \quad (1.2)$$

Il s'agit alors de réaliser un monocristal macroscopique (de masse nominale 1 kg, de manière à pouvoir procéder à un raccordement de la masse de haute exactitude dans le SI) possédant une structure connue aussi parfaite que possible (en pratique une sphère, robuste et permettant une bonne détermination de son volume, dont il faut évaluer le paramètre de maille  $d_{220}$ , la quantité de défauts cristallins, et la composition isotopique<sup>13</sup>).

En utilisant l'expression  $R_{\infty} = \frac{m_{\text{e}} \cdot c \cdot \alpha^2}{2 \cdot h}$  (où  $R_{\infty}$  est la constante de Rydberg,  $\alpha$  la constante de structure fine,  $c$  la vitesse de la lumière et  $m_{\text{e}}$  la masse de l'électron), on obtient une relation entre la constante de Planck  $h$  et la constante d'Avogadro  $N_{\text{A}}$  :

$$h = \frac{c \cdot \alpha^2}{2 \cdot R_{\infty}} \cdot m_{\text{e}} = \frac{c \cdot \alpha^2 \cdot A_{\text{r}}(\text{e}) \cdot M_{\text{u}}}{2 \cdot R_{\infty} \cdot N_{\text{A}}}, \quad (1.3)$$

où  $A_{\text{r}}(\text{e})$  est le poids atomique relatif de l'électron au carbone-12 et  $M_{\text{u}}$  la constante de masse molaire ( $1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ).

Les grandeurs  $c$  et  $M_{\text{u}}$  sont connues exactement dans le SI, tandis que  $A_{\text{r}}(\text{e})$ ,  $\alpha$  et  $R_{\infty}$  ont des incertitudes au moins un ordre de grandeur inférieur à celle de  $N_{\text{A}}$  déterminé par XRCd : l'incertitude relative sur  $h$  calculée par cette formule est donc en pratique égale à celle sur  $N_{\text{A}}$  déterminée par XRCd.

### 1.2.1.2 Résultats

L'ampleur de la tâche nécessaire à la réalisation et à la caractérisation aussi fine d'une sphère de silicium a requis la création d'un large consortium international, le IAC (International Avogadro consortium « Consortium international Avogadro »).

---

13. Le silicium possède trois isotopes stables :  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{29}\text{Si}$  et  $^{30}\text{Si}$  : la composition isotopique de l'échantillon à l'origine des sphères doit être connue pour déterminer la masse molaire  $M_{\text{mol}}$  du cristal. La détermination de cette composition isotopique est un paramètre crucial pour la maîtrise de l'incertitude de la mesure.

Nous présentons les résultats obtenus pour  $h$  par l'étude de sphère de silicium dans l'ordre chronologique. Quelques valeurs ont été modifiées postérieurement à leur publication initiale : c'est la valeur « finale » que nous reportons ici.

La valeur de la constante d'Avogadro qui fut publiée en 2003 [66, 70] à partir d'un monocristal de silicium naturel permet d'obtenir une valeur pour la constante de Planck à l'aide de l'équation précédente<sup>14</sup>. En 2011, une erreur d'étalonnage d'un spectromètre atomique (déterminant la composition isotopique du cristal, mesure effectuée par la PTB<sup>15</sup>) a été identifiée et a conduit à modifier la valeur obtenue en 2003 de  $-1,2 \times 10^{-6}$  en valeur relative [71] (l'incertitude relative étant par ailleurs légèrement diminuée à  $2,4 \times 10^{-7}$ ), pour obtenir finalement<sup>16</sup> :

$$\text{IAC-2004} \quad \begin{cases} h = 6,626\,068\,1(16) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = -11(24) \times 10^{-8} \end{cases} \quad (1.4)$$

À partir de deux sphères de silicium enrichies en  $^{28}\text{Si}$  à 99,985 % en masse [72], des valeurs de la constante d'Avogadro ont été publiées dans [73–75] en 2010 et 2011 par le IAC qui correspondent à la valeur de constante de Planck suivante :

$$\text{IAC-2010} \quad \begin{cases} h = 6,626\,070\,14(20) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 190(30) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.5)$$

L'accord de cette valeur avec IAC-2004 se fait sur l'extrémité des barres d'incertitude. Cette valeur fut corrigée<sup>17</sup> (d'environ  $35 \times 10^{-9}$  en valeur relative, l'exposant « cm » dans le résultat ci-dessous signifiant « correction masse ») de la dérive de l'unité de masse maintenue par le BIPM en 2015 :

$$\text{IAC-2010}^{\text{cm}} \quad \begin{cases} h = 6,626\,070\,02(20) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 176(30) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.6)$$

Le NRC<sup>18</sup> en 2012 [77]<sup>19</sup> procéda à une mesure indépendante de la composition isotopique du matériau à l'origine de la sphère de  $^{28}\text{Si}$  utilisée par le IAC pour ses deux sphères. La quantité ainsi déterminée de  $^{30}\text{Si}$  fut d'environ la

14. Et en utilisant les valeurs recommandées de l'ajustement CODATA de 1998 [48].

15. Physikalisch-Technische Bundesanstalt, institut national de métrologie allemand.

16. La valeur  $h_{90} = 6,626\,068\,854 \dots \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , qui a une valeur exacte, est utilisée pour comparer commodément les résultats des détermination de  $h$  décrites dans ce chapitre ; elle est définie au paragraphe d de la section 1.2.2.1.

17. Non encore publié. Résultat communiqué en [76].

18. National research council, institut national de métrologie canadien.

19. Dans cette même publication est reportée une détermination de la constante de Planck au moyen d'une balance du watt : ce résultat sera commenté plus loin.

moitié de celle déterminée par la PTB pour le silicium. Cette valeur, combinée aux autres données fournies par le IAC et aux valeurs recommandées par l'ajustement CODATA de 2010, a permis de calculer la valeur de la constante de Planck suivante :

$$\text{NRC-2012} \quad \begin{cases} h = 6,626\,070\,55(21) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 256(32) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.7)$$

Toutefois, des mesures sur des échantillons par le NMIJ<sup>20</sup> et le NIST<sup>21</sup> en 2014 [78, 79] confirmèrent les résultats de mesure de la masse molaire du silicium et par conséquent la robustesse de la méthode de détermination de la composition isotopique du cristal de silicium utilisée par la PTB pour la valeur de la constante de Planck du IAC, notée IAC-2010 plus haut.

Les sphères de silicium du IAC furent à nouveau polies et caractérisées. La valeur obtenue en 2015 pour la valeur de  $h$  présente une incertitude-type relative de  $2 \times 10^{-8}$  [80] :

$$\text{IAC-2015} \quad \begin{cases} h = 6,626\,070\,12(13) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 191(20) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.8)$$

### 1.2.2 Balances du watt

L'objectif de remplacer la définition du kilogramme fondée sur un artefact matériel par une autre reposant sur des constantes fondamentales requiert une méthode pour relier une masse *macroscopique* à de telles constantes. Cela peut être réalisé en utilisant une balance du watt qui repose sur deux effets quantiques (l'effet Josephson et l'effet Hall quantique), pour relier des masses macroscopiques à la constante de Planck  $h$ , à la vitesse de la lumière  $c$  et enfin à la transition entre deux niveaux de la structure hyperfine du césium-133  $\nu_{\text{Cs}}$ .

#### 1.2.2.1 Principe de la mesure

La méthode de la balance du watt est une modification de celle employée pour la détermination de la valeur absolue de l'ampère. La description du principe de la détermination de la constante de Planck, de la dérivation de cette valeur en unité du SI et de la définition du kilogramme en fonction de  $h$  est présentée dans cette section.

Le principe a été proposé par Brian Kibble du NPL<sup>22</sup> lors de la cinquième *Conference on atomic masses and fundamental constants* à Paris en 1975 et publié

20. National metrology institute of Japan, institut national de métrologie japonais.

21. National institute of standards and technology, institut métrologique national des États-unis.

22. National physical laboratory, institut national de métrologie du Royaume-Uni.



en 1976 [81]. Il constitue une évolution des principes mis en œuvre pour la détermination de l'ampère à partir des expériences de mesure du rapport gyromagnétique du proton en champ fort et en champ faible. Le dispositif expérimental de mesure du rapport gyromagnétique du proton en champ fort était partiellement issu des électrodynamomètres antérieurement destinés à la matérialisation de l'ampère en unité du Système international. L'intérêt est alors de s'affranchir de certaines limitations des expériences mises en œuvre pour la détermination de l'ampère dans le SI : électrodynamomètre, mesure du rapport gyromagnétique du proton en champ fort et en champ faible.

En effet, ces expériences utilisent, pour déterminer l'intensité du courant dans le SI, la comparaison d'une force de Laplace au poids d'un étalon de masse. La force de Laplace est générée par le courant qui circule dans un conducteur électrique placé dans un champ d'induction magnétique. Ce champ peut être produit par une bobine parcourue par un courant comme l'électrodynamomètre du LCIE<sup>23</sup> utilisé dans les années 1960. La détermination de la force de Laplace exige de connaître les paramètres géométriques du conducteur électrique qui induit cette force et ceux de la bobine qui génère le champ d'induction. Cette méconnaissance du diamètre, du rayon du fil, de son pas d'enroulement... est le facteur qui limite à quelques  $5 \times 10^{-6}$  [82] l'incertitude relative de la détermination du courant dans le SI par cette méthode.

Le principe de la balance du watt permet de déterminer la valeur des paramètres dimensionnels de la bobine et du champ d'induction dans lequel elle est plongée (« facteur géométrique ») en ajoutant à la comparaison des forces une deuxième phase de mesure.

La « balance » est représentée par l'égalisation de forces mécaniques et électromagnétiques, et le « watt » correspond à l'égalité des puissances virtuelles mécaniques et électromagnétiques calculées par la combinaison des deux phases de l'expérience.

**a. Une représentation par gradients** Cette représentation est celle qui fut originellement employée par Kibble.

Considérons un conducteur  $\mathcal{C}$  parcouru par un courant  $I$  dans un flux magnétique  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ , où  $\vec{B}$  est le champ d'induction et  $S$  une surface s'appuyant sur le cadre du conducteur (FIGURE 1.4). Sous réserve de respecter un certain nombre de conditions (champ magnétique radial et horizontal, bobine circulaire et horizontale, axes de révolution du champ magnétique et de la bobine confondus) l'intégrale précédente s'évalue comme  $\Phi(z) = (B \cdot \ell) \cdot z$ , où  $\ell$  la longueur d'enroulement de la bobine et  $z$  sa position verticale. L'énergie d'interaction magnétique est  $W = -I \cdot \Phi$  [83] et il existe donc une composante de force verticale (forme différentielle de la loi de Laplace) :

$$F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = I \cdot \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = (B \cdot \ell) \cdot I, \quad (1.9)$$

23. Laboratoire commun des industries électriques.

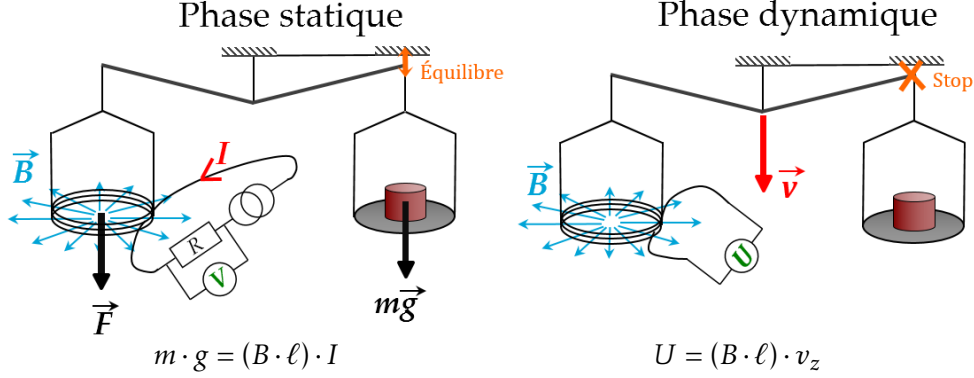


FIGURE 1.4 – Principe d’une balance du watt. Au cours de la *phase statique*, on équilibre le poids d’une masse étalon ( $m \cdot \vec{g}$ ) et d’une force électromagnétique nominale verticale  $\vec{F}$  en imposant la circulation d’un courant  $I$  dans une bobine plongée dans un champ d’induction magnétique  $\vec{B}$ . Ce courant  $I$  est mesuré par la chute de tension  $V$  qu’il provoque aux bornes d’une résistance  $R$ . Au cours de la *phase dynamique*, le fléau est rendu solidaire d’un système de translation : on impose une vitesse de déplacement nominale verticale  $\vec{v}$  à la bobine, et on mesure la tension induite  $U$  à ses bornes lors de cette trajectoire. Les deux phases peuvent être combinées si on fait l’hypothèse que la même bobine est plongée dans le même champ magnétique.

qui peut être déterminée en unités du système international en lui opposant le poids  $P = m \cdot g$  d’une masse  $m$  dans l’accélération du champ de pesanteur  $g$ , lors de cette *phase statique* :

$$m \cdot g = (B \cdot \ell) \cdot I. \quad (1.10)$$

Supposons maintenant que le même conducteur, dans une mesure distincte<sup>24</sup> (dite *phase dynamique*), se déplace à une vitesse verticale  $v_z$  dans le même flux  $\Phi$ . Alors, une *fem*<sup>25</sup>  $U$  est générée à ses bornes (forme différentielle de la loi de Lenz-Faraday) :

$$U = -\frac{\partial \Phi(z)}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = (B \cdot \ell) \cdot v_z. \quad (1.11)$$

Si entre les deux phases le flux magnétique  $\Phi(z)$  peut être considéré constant au regard des incertitudes visées, alors le gradient de flux  $\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = (B \cdot \ell)$  dans l’espace peut être éliminé pour obtenir l’égalité des puissances virtuelles dans le SI [85, 86] (il n’apparaît donc aucune perte de puissance, par frottement ou par effet Joule) :

$$m \cdot g \cdot v_z = U \cdot I, \quad (1.12)$$

24. À l’exclusion de la balance du watt du BIPM, pour laquelle ces deux phases se déroulent simultanément [84].

25. Force électromotrice.

Attendu que  $I$  est déterminé à partir de la chute de tension  $V$  qu'il provoque aux bornes d'une résistance  $R$ , on écrit enfin :

$$m \cdot g \cdot v_z = U \cdot \frac{V}{R}. \quad (1.13)$$

Il s'agit de puissances virtuelles, puisque l'on fait le produit du poids de l'éta-lon par la vitesse de la bobine, ainsi que le produit de la tension apparaissant aux bornes de la bobine en phase dynamique par le courant qui y circule en phase statique.

Ce raisonnement ne présuppose ni la façon dont le champ d'induction est généré, ni la forme du conducteur : il suppose seulement le gradient de flux  $\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} = (B \cdot \ell)$  constant entre les deux phases.

Toutes les grandeurs apparaissant dans cette équation doivent être déterminées au même moment avec une incertitude relative si possible meilleure que  $1 \times 10^{-8}$  : par conséquent l'accélération de la pesanteur  $g$  au centre de gravité de la masse doit également être déterminée avec cette incertitude cible.

**b. Des grandeurs vectorielles** Le principe de base décrit précédemment suppose trois hypothèses validées simultanément :

- Le flux magnétique  $\Phi$  dépend exclusivement de la position verticale de la bobine, il n'existe donc qu'une composante de force verticale  $\vec{F} = F_z \cdot \vec{e}_z$  ;
- Le gradient de flux est identique entre les deux phases ;
- Enfin, la vitesse de déplacement de la bobine en phase dynamique est rigoureusement verticale,  $\vec{v} = v_z \cdot \vec{e}_z$ .

Les deux premières conditions signifient également que le flux  $\Phi$  ne doit pas dépendre explicitement (sous l'effet d'une variation de température du circuit magnétique par exemple) ou implicitement du temps (du fait d'une position différente de la bobine entre les deux phases, ou encore d'une variation de la géométrie du circuit magnétique).

En conséquence, plusieurs contraintes géométriques doivent être respectées pour une balance du watt :

- Le plan du champ d'induction doit être confondu avec le plan horizontal ;
- Le plan magnétique de la bobine doit être confondu avec le plan horizontal ;
- L'axe de déplacement de la bobine doit être confondu avec l'axe vertical ;
- La bobine mobile doit passer en phase dynamique exactement par l'emplacement qu'elle occupe en phase statique ;
- La bobine est stable dimensionnellement, le champ magnétique est stable en intensité et en géométrie.

La qualité des systèmes électromécaniques permet de s'approcher des conditions énumérées mais ne permet pas de les respecter rigoureusement.

Il importe donc notamment de tenir compte de la nature vectorielle de la vitesse et des forces s'exerçant sur la bobine et de la dépendance du flux  $\Phi$  coupé par la bobine selon sa position selon les 3 axes de l'espace ( $x, y, z$ ) et selon ses inclinaisons ( $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ ) autour des 3 mêmes axes : on établit dans les lignes qui suivent une équation plus complète d'une balance du watt.

Les mouvements latéraux ou les rotations de la bobine contribuent également à la tension induite, comme l'a identifié Stenbakken [87] : cette tension induite aux bornes du conducteur en phase dynamique résulte de la contribution des vitesses linéaires ( $v_x, v_y, v_z$ ) selon chacun des trois axes et des vitesses angulaires de la bobine ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ) autour de ces trois mêmes axes. Au signe près, on a :

$$U = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \cdot v_x + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \cdot v_y + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \cdot v_z + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_x} \right) \cdot \omega_x + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_y} \right) \cdot \omega_y + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_z} \right) \cdot \omega_z. \quad (1.14)$$

La tension  $U$  mesurée est donc causée par la vitesse verticale  $v_z$  de la bobine, mais aussi par des vitesses horizontales et angulaires, les *vitesses parasites*.

De la même façon, un positionnement imparfait de la bobine en phase statique – et donc des gradients de flux non nuls selon les composantes autres que  $z$  – se traduit par la présence de forces que l'on peut décomposer sur les trois axes  $x, y$ , et  $z$  et celle des moments autour des trois mêmes axes. Les forces et les moments s'expriment alors également en fonction des mêmes gradients de flux, au signe près :

$$F_x = I \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad F_y = I \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad F_z = I \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ M_x = I \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_x}, \quad M_y = I \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_y}, \quad M_z = I \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_z}. \quad (1.15)$$

En plus de la force électromagnétique verticale  $F_z$  – qui est la force effectivement mesurée, en lui opposant  $m \cdot \vec{g}$  – la bobine subit des forces horizontales et des moments, les *forces et moments parasites*.

On combine les deux précédentes équations pour obtenir :

$$U \cdot I = F_x \cdot v_x + F_y \cdot v_y + F_z \cdot v_z + M_x \cdot \omega_x + M_y \cdot \omega_y + M_z \cdot \omega_z. \quad (1.16)$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous forme vectorielle :

$$U \cdot I = \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{M} \cdot \vec{\omega}, \quad (1.17)$$

La puissance électrique virtuelle est égale à la puissance mécanique virtuelle : cette formulation rend bien compte de la nature vectorielle des forces et des vitesses (auxquelles on ajoute les vitesses angulaires et les moments, puisque la bobine est un solide).

Pour des raisons expérimentales, parmi les forces, moments, et vitesses, seules la force verticale  $F_z$  s'exerçant sur la bobine et la vitesse verticale  $v_z$  de déplacement de la bobine sont mesurées avec des incertitudes compatibles avec les objectifs d'une détermination de la constante de Planck ; les autres termes sont considérés comme des termes d'erreur.

Si par ailleurs le comparateur de force n'est sensible qu'à la composante verticale des forces, on équilibre  $F_z$  avec la masse étalon :  $\vec{F}_z = m \cdot \vec{g}$ . On peut faire alors apparaître un terme d'erreur sous la forme suivante [88] :

$$U \cdot I = m \cdot g \cdot v_z \cdot \left[ 1 + \left( \frac{F_x}{F_z} \cdot \frac{v_x}{v_z} + \frac{F_y}{F_z} \cdot \frac{v_y}{v_z} + \frac{M_x}{F_z} \cdot \frac{\omega_x}{v_z} + \frac{M_y}{F_z} \cdot \frac{\omega_y}{v_z} + \frac{M_z}{F_z} \cdot \frac{\omega_z}{v_z} \right) \right], \quad (1.18)$$

$$U \cdot I = m \cdot g \cdot v_z \cdot (1 + \epsilon_p), \quad (1.19)$$

où  $F_x, F_y, v_x$  et  $v_y$  sont les forces et les vitesses horizontales du centre de masse de la bobine selon les axes  $x$  et  $y$  ; tandis que  $M_x, M_y, M_z, \omega_x, \omega_y$  et  $\omega_z$  sont les moments rapportés au centre de masse et les vitesses angulaires de la bobine autour des trois axes  $x, y$  et  $z$ .

Ainsi, la puissance électrique totale mesurée  $U \cdot I$  est égale à la puissance mécanique « verticale »  $F_z \cdot v_z = m \cdot g \cdot v_z$  corrigée d'un facteur que nous désignerons comme l'*erreur de puissance*  $\epsilon_p$ , c'est-à-dire le produit des forces horizontales et moments (forces et moments parasites) avec les vitesses horizontales et angulaires (vitesses parasites).

L'erreur de puissance se présente comme la somme du produit de termes d'erreurs : si par exemple le rapport de la vitesse transverse  $v_x$  à la vitesse verticale  $v_z$  est de  $1 \times 10^{-4}$ , et que le rapport de la force horizontale  $F_x$  à la force verticale  $F_z$  est de  $1 \times 10^{-4}$ , alors la puissance parasite relative associée est de  $1 \times 10^{-8}$  en valeur relative. Il s'agit d'un terme du second ordre, permettant d'obtenir des incertitudes significativement plus faibles que celles des réglages mécaniques correspondants.

Ce terme  $\epsilon_p$  est une correction de la puissance mécanique mesurée par rapport au cas idéal de l'équation 1.12. Cette quantité parasite doit donc être évaluée et prise en compte si elle ne peut être réduite à une contribution négligeable au regard de l'incertitude cible de quelques  $10^{-8}$  en valeur relative [89] en assurant un réglage optimal de la balance. Chacun des laboratoires développant ou ayant développé une balance du watt a mis au point une procédure de minimisation et d'évaluation de ce terme d'erreur : le NIST [88, 90], le NPL [85], le METAS<sup>26</sup> [91, 92], le BIPM [84, 93] ou le NRC [94, 95].

26. Institut fédéral de métrologie METAS, institut national de métrologie suisse.

**c. Représentation intégrale** Il peut être commode d'utiliser une représentation intégrale des équations du paragraphe précédent.

La tension aux bornes de la bobine est reliée au champ magnétique  $\vec{B}$  en chacun des éléments infinitésimaux  $d\vec{\ell}$  de la bobine de contour  $\mathcal{C}$  et à la vitesse  $\vec{u}$  de ces éléments, selon la loi de Lenz :

$$U = \oint_{\mathcal{C}} (\vec{u} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}). \quad (1.20)$$

Le terme  $\oint_{\mathcal{C}} (d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$  se réduit à  $(B \cdot \ell) \cdot \vec{e}_z$  dans le cas idéal d'une bobine parfaitement alignée.

Tout élément de longueur de la bobine est *a priori* soumis à une induction magnétique différente, tant en intensité qu'en direction, et se déplace à une vitesse différente, tant en intensité qu'en direction. Si toutefois on considère la bobine comme un solide rigide, la vitesse  $\vec{u}$  de chacun des points de la bobine peut être reliée à la vitesse  $\vec{v}$  d'un point de référence quelconque de la bobine :

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \quad (1.21)$$

où  $\vec{\omega}$  est la vitesse angulaire de la bobine et  $\vec{r}$  la distance du point de référence au point considéré de la bobine. Le point de référence choisi est le centre de masse  $G$  de la bobine puisque c'est le point dont on s'attachera à déterminer expérimentalement la vitesse. À l'aide de l'équation précédente, on peut développer l'équation 1.20 de la manière suivante :

$$U = \vec{v} \cdot \oint_{\mathcal{C}} (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) + \vec{\omega} \cdot \oint_{\mathcal{C}} (\vec{r} \wedge d\vec{\ell} \wedge \vec{B}). \quad (1.22)$$

Si ce raisonnement a été conduit en considérant une bobine mobile (soit en phase dynamique), les intégrales de la relation précédente possèdent une interprétation physique en termes de forces et de moments (soit en phase statique) puisque, selon la loi de Faraday :

$$\vec{F} = I \oint_{\mathcal{C}} (d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \quad \text{et} \quad \vec{M} = I \oint_{\mathcal{C}} (\vec{r} \wedge d\vec{\ell} \wedge \vec{B}). \quad (1.23)$$

Dans ces conditions, l'équation 1.22 se développe de la manière suivante :

$$U \cdot I = \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{M} \cdot \vec{\omega}, \quad (1.24)$$

où  $\vec{v}$  et  $\vec{\omega}$  sont les vitesses linéaires et angulaires de la bobine qui induisent la tension  $U$  en phase dynamique. Le courant  $I$  quant à lui, est à l'origine de la force  $\vec{F}$  et du moment  $\vec{M}$  s'exerçant sur la bobine en phase statique. La puissance électrique virtuelle est égale à la puissance mécanique virtuelle. On obtient à nouveau l'équation 1.17.

**d. La métrologie électrique** La relation précédente, une égalité de puissance dans le SI, peut être utilisée pour déterminer la valeur de  $h$  si les tensions et les résistances sont référencées par rapport à l'effet Josephson et à l'effet Hall quantique.

**Effet Josephson et effet Hall quantique** À partir de la fin des années 1980, les instituts nationaux de métrologie délaissent la conservation par des moyens classiques de l'ohm (résistance à fil bobiné) et du volt (pile de Wheaton saturée, diode Zener) en faveur de dispositifs utilisant des phénomènes quantiques permettant de maintenir des étalons de tension, l'effet Josephson<sup>27</sup> [99]; et de résistance, l'effet Hall quantique<sup>28</sup> [101].

À ces deux effets<sup>29</sup> sont associées respectivement la constante de Josephson,  $K_J$  et la constante de von Klitzing,  $R_K$  dont les valeurs théoriques<sup>30</sup> sont des combinaisons de la charge élémentaire  $e$  et de la constante de Planck  $h$ :

$$K_J \doteq \frac{2 \cdot e}{h}, \quad (1.25)$$

$$R_K \doteq \frac{h}{e^2}. \quad (1.26)$$

L'universalité de  $K_J$  et de  $R_K$  – c'est-à-dire leur invariance aux conditions expérimentales, comme par exemple les matériaux – pour l'effet Josephson dans les expériences des 30 dernières années ont été compilés par Wood *et al.* [105]; et de nombreuses études théoriques et expérimentales confirmant l'exactitude de la relation de l'effet Hall quantique ont été publiées dans un numéro spécial des *C. R. Physique*, voir en particulier la préface [106].

Les recommandations de valeurs de ces deux constantes par CODATA (Committee on data for science and technology) [51] suite à un ajustement des données expérimentales, où les valeurs entre crochets sont les incertitudes-types relatives des valeurs admises, sont :

$$K_J = 483\,597,870(11) \times 10^9 \text{ Hz} \cdot \text{V}^{-1}, \quad [u_r = 2,2 \times 10^{-8}], \quad (1.27)$$

$$R_K = 25\,812,807\,443\,4(84) \, \Omega, \quad [u_r = 3,2 \times 10^{-10}]. \quad (1.28)$$

L'acceptation<sup>31</sup> des expressions théoriques 1.25 et 1.26, conduit à :

$$h \doteq \frac{4}{K_J^2 \cdot R_K} \quad (1.29)$$

27. Effet prédit par Josephson en 1962 [96], effet Josephson DC observé par Anderson et Rowell en 1963 [97], effet Josephson AC observé par Shapiro en 1963 [98].

28. Effet Hall quantique découvert en 1980 par von Klitzing [100].

29. On consultera à ce sujet les chapitres introductifs des thèses de Steck et Charron [102, 103] et l'article de Piquemal *et al.* [104].

30. L'utilisation de  $\doteq$  signifie qu'il s'agit d'une égalité théorique. Le terme de gauche est une donnée d'entrée et le terme de droite une constante ajustée ; les deux termes ne sont pas toujours égaux [48].

31. Au sujet de la validité des relations  $K_J \doteq \frac{2e}{h}$  et  $R_K \doteq \frac{h}{e^2}$ , on pourra consulter les quatre derniers rapports CODATA [48–51].

L'unité de  $h$  étant le  $\text{J} \cdot \text{s}$ , autrement dit le  $\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , cette relation impose un lien entre ces constantes électriques et le kilogramme.

**Le « système 90 »** De manière à profiter de l'excellente reproductibilité – quelques  $1 \times 10^{-16}$  pour l'effet Josephson, quelques  $1 \times 10^{-10}$  pour l'effet Hall quantique en valeur relative [103] – de ces deux phénomènes, bien meilleure que leur incertitude dans le SI, des valeurs conventionnelles furent adoptées en 1990 et désignées par  $K_{\text{J-90}}$  et  $R_{\text{K-90}}$ , pour maintenir une représentation du volt (dont l'unité est notée  $V_{90}$ ) et une représentation de l'ohm (dont l'unité est notée  $\Omega_{90}$ ) et valent exactement [107–109]:

$$K_{\text{J-90}} = 483\,597,9 \times 10^9 \text{ Hz} \cdot V_{90}^{-1} \quad \text{et} \quad R_{\text{K-90}} = 25\,812,807 \, \Omega_{90}, \quad (1.30)$$

ces valeurs permettant aux instituts de métrologie de conserver le volt et l'ohm. On appelle alors « système 90 », les unités déterminées à partir de  $K_{\text{J-90}}$  et  $R_{\text{K-90}}$ . Ces unités ont l'indice 90 du fait que la recommandation mettant en place ces valeurs a pris effet le 1<sup>er</sup> janvier 1990.

On peut noter que dans le SI, l'incertitude-type relative admise sur  $K_{\text{J}}$  en 1988 était de  $4 \times 10^{-7}$  [107] et celle sur  $R_{\text{K}}$  était en 1988 de  $2 \times 10^{-7}$  [108] (et de  $1 \times 10^{-7}$  en 2000 [110]). La comparaison des deux valeurs précédentes (« meilleures » valeurs connues en 1990) aux valeurs admises en 2010 (équations 1.27 et 1.28) montre que les incertitudes-types relatives d'alors sur  $K_{\text{J}}$  et  $R_{\text{K}}$  (respectivement  $4 \times 10^{-7}$  et  $2 \times 10^{-7}$ ) se sont matérialisées par des écarts relatifs significativement plus faibles (respectivement  $\frac{K_{\text{J-90}} - K_{\text{J}}}{K_{\text{J}}} = 6,2 \times 10^{-8}$  et  $\frac{R_{\text{K-90}} - R_{\text{K}}}{R_{\text{K}}} = -1,7 \times 10^{-8}$ ) soulignant la pertinence des valeurs choisies en 1990.

Enfin, sous réserve d'accepter les expressions théoriques 1.25 et 1.26, on utilise également ces valeurs conventionnelles  $K_{\text{J-90}}$  et  $R_{\text{K-90}}$  pour définir une valeur conventionnelle de la constante de Planck,

$$h_{90} = \frac{4}{K_{\text{J-90}}^2 \cdot R_{\text{K-90}}} = 6,626\,068\,854... \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (\text{exact}), \quad (1.31)$$

qui a une valeur exacte, mais une infinité de décimales. Cette valeur permet une comparaison commode des différentes valeurs de la constante de Planck par le calcul de leur écart relatif à  $h_{90}$ . Ainsi, la valeur recommandée de la constante de Planck par CODATA lors de son ajustement de 2010 [51] s'écrit :

$$\text{CODATA-2010} \quad \begin{cases} h = 6,626\,069\,57(29) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 108(44) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.32)$$

Mais, comme cela est mentionné en [109], ces valeurs conventionnelles ne peuvent être utilisées afin de définir le volt et l'ohm dans le SI, puisqu'elle créent une nouvelle relation *exacte* entre les unités électriques et mécaniques



(équation 1.31). Dans le cas contraire, cela changerait le statut de  $\mu_0$  (perméabilité du vide) d'une constante à la valeur exactement définie à celle d'une constante connue à une incertitude près (et donc abrogerait la définition de l'ampère) et conduirait alors à des unités électriques qui seraient incompatibles avec la définition du kilogramme et de ses unités dérivées.

Les mesures électriques, reliées à  $K_{J-90}$  et à  $R_{K-90}$ , se font donc de nos jours sans raccordement à l'ampère, c'est à dire se font en dehors du SI [13, 17].

**e. Valeur de la constante de Planck en unités du SI** Dans le SI, l'équation de la balance – ici dans le cas idéal –, est exacte :

$$U \cdot \frac{V}{R} = m \cdot g \cdot v_z, \quad (1.33)$$

La puissance électrique, exprimée en watts, est égale à la puissance mécanique, exprimée en watt. Cela est vrai si toutes les grandeurs de l'équation sont mesurées en unités du SI. C'est le cas de l'accélération de la pesanteur,  $g$ , de la masse de l'étalon  $m$  et de la vitesse de déplacement verticale de la bobine  $v_z$ .

Les réalisations pratiques du volt (pour la mesure de  $U$  et  $V$ ) et de l'ohm (pour la mesure de  $R$ ) sont dérivées de l'effet Josephson et de l'effet Hall quantique et sont égales à :

$$U = \frac{n_U \cdot f_U}{K_J}, \quad V = \frac{n_V \cdot f_V}{K_J}, \quad (1.34)$$

$$R = \frac{R_K}{n_R}, \quad (1.35)$$

où  $n_U$ ,  $n_V$  et  $n_R$  sont des nombres entiers, et  $f_U$  et  $f_V$  les fréquences d'irradiation appliquées aux jonctions Josephson.

L'expression de l'égalité nominale des puissances de l'équation de la balance s'écrit donc :

$$m \cdot g \cdot v_z = \frac{U \cdot V}{R} = \frac{\frac{n_U \cdot f_U}{K_J} \cdot \frac{n_V \cdot f_V}{K_J}}{\frac{R_K}{n_R}}, \quad (1.36)$$

$$m \cdot g \cdot v_z = \frac{A}{R_K \cdot K_J^2}, \quad (1.37)$$

où  $A = n_R \cdot n_U \cdot n_V \cdot f_U \cdot f_V$ , un paramètre connu contenant les fréquences d'irradiation hyperfréquence et les indices de marche des réseaux Josephson ainsi que l'indice du plateau de quantification de résistance.

La balance du watt est donc une expérience permettant de déterminer le produit  $R_K \cdot K_J^2$  dans le SI. Dans le cadre d'une rédefinition du kilogramme, l'expérience de la balance du watt peut donc faire le lien entre une masse  $m$  et

$R_K \cdot K_J^2$ . Cependant, à partir de l'expression théorique de ce produit, on peut écrire :

$$m \cdot g \cdot v_z \doteq \frac{A \cdot h}{4}. \quad (1.38)$$

On obtient alors une équation liant une masse macroscopique  $m$  à la valeur de la constante de Planck  $h$ .

Il est donc possible, si les équations 1.25 et 1.26 sont vérifiées, d'utiliser la balance du watt tout d'abord pour mesurer  $h$  à partir de la masse  $m$  (valeur connue dans le SI, autrement dit comparée à  $\tilde{h}$ ). Ensuite, une fois la valeur de la constante de Planck fixée exactement, d'utiliser la balance du watt pour définir le kilogramme à partir de  $h$ .

Toutefois, l'unité pratique de tension est dérivée de l'effet Josephson lors même que la constante de Josephson  $K_J = \frac{2e}{h}$  est mal connue dans le SI : on utilise en fait la constante de réalisation  $K_{J-90}$  (valeur exacte), et on utilise l'unité conventionnelle de tension volt-90 (symbole  $V_{90}$ ).

De la même manière, la constante de von Klitzing  $R_K = \frac{h}{e^2}$  est mal connue dans le SI : on utilise l'unité conventionnelle de résistance ohm-90 (symbole  $\Omega_{90}$ ), définie à partir de  $R_{K-90}$  (valeur exacte).

Si  $f$  est la fréquence déterminée lors de la mesure d'une tension dont la valeur est  $U$  dans le SI et  $U_{90}$  rapportée aux valeurs conventionnelles de 1990, on peut écrire :

$$U = \frac{n_U \cdot f}{K_J} \quad \text{et} \quad U_{90} = \frac{n_U \cdot f}{K_{J-90}}, \quad (1.39)$$

d'où il résulte que :

$$\frac{U}{U_{90}} = \frac{K_{J-90}}{K_J}. \quad (1.40)$$

Le même raisonnement pour  $R$  et  $R_{90}$  conduit à :

$$\frac{R}{R_{90}} = \frac{R_K}{R_{K-90}}. \quad (1.41)$$

L'expression de l'égalité nominale des puissances de l'équation de la balance s'écrit donc :

$$m \cdot g \cdot v_z = \frac{U \cdot V}{R} = \frac{\frac{K_{J-90}}{K_J} \cdot U_{90} \cdot \frac{K_{J-90}}{K_J} \cdot V_{90}}{\frac{R_K}{R_{K-90}} \cdot R_{90}} \quad (1.42)$$

$$m \cdot g \cdot v_z = \frac{h}{4} \cdot K_{J-90}^2 \cdot R_{K-90} \cdot \frac{U_{90} \cdot V_{90}}{R_{90}}. \quad (1.43)$$

La valeur conventionnelle de la constante de Planck  $h_{90} = 4/(K_{J-90}^2 \cdot R_{K-90}) = 6,626\,068\,854\dots \text{J} \cdot \text{s}$ , qui a une valeur exacte, mais une infinité de

décimales, peut être utilisée dans cette dernière équation :

$$h = h_{90} \cdot \underbrace{\frac{1}{U_{90}}}_{\text{dyn.}} \cdot \underbrace{\frac{m \cdot g}{V_{90}}}_{\text{stat.}}, \quad (1.44)$$

en faisant apparaître les termes déterminés en phase dynamique et en phase statique<sup>32</sup>. Une formulation plus compacte peut toutefois être préférée :

$$h = h_{90} \cdot \frac{R_{90}}{U_{90} \cdot V_{90}} \cdot m \cdot g \cdot v_z, \quad (1.45)$$

Ainsi, on peut déterminer la valeur de  $h$  à partir de mesures en unités 90 sous réserve que les valeurs de  $K_{J-90}$  et  $R_{K-90}$  soient bien utilisées pour les mesures de tension et de résistance.

Cette détermination de la constante de Planck ne dépend pas des valeurs adoptées pour  $K_{J-90}$  et  $R_{K-90}$  ni de l'incertitude dans le SI de  $K_J$  et  $R_K$ . La constante de Planck apparaît dans cette équation comme une conséquence des expressions de la constante de Josephson et de celle de von Klitzing : ce sont les théories sur lesquelles reposent ces deux effets qui font surgir  $h$  des relations impliquant des tensions et des résistances.

Les valeurs choisies de  $K_{J-90}$  et  $R_{K-90}$  n'ont en elles-même pas d'importance : elles pourraient être égales à 1 ou ne pas être connues, elles n'ont ces valeurs choisies en 1990 que pour fournir des références de tension et de résistance « proches » de celles du SI et identiques pour tous les laboratoires.

Dans la suite du manuscrit, bien que les tensions et les résistances soient déterminées par comparaison aux étalons quantiques cités dans cette section, il ne seront pas systématiquement suivis de l'indice « 90 » de manière à alléger les notations.

**f. Le kilogramme en fonction de la valeur de la constante de Planck** La démonstration de Robinson [111] explicite le principe de la dérivation de l'unité de masse à partir des grandeurs mesurées expérimentalement par une balance du watt.

L'équation de la balance (équation 1.13) est dans le SI :

$$m = \frac{1}{g \cdot v_z} \cdot \frac{U \cdot V}{R}. \quad (1.46)$$

À l'issue de la modification du SI, les valeurs de la constante de Planck et la charge élémentaire seront fixées et connues exactement, et par voie de

---

32. Ces termes sont les facteurs géométriques en phase dynamique  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}, 90} = \left( \frac{U_{90}}{v_z} \right)$  et en phase statique  $(B \cdot \ell)_{\text{stat}, 90} = \left( \frac{m \cdot g}{\frac{V_{90}}{R_{90}}} \right)$ .

conséquence celles de la constante de Josephson  $K_J = \frac{2e}{h}$  et de von Klitzing  $R_K = \frac{h}{e^2}$ . Par conséquent, les grandeurs  $U$ ,  $V$  et  $R$  seront déterminées dans le nouveau SI d'après une fréquence  $f$  de référence du laboratoire.

$$U = \frac{n_U \cdot f}{K_J} = \frac{n_U \cdot f}{\frac{2e}{h}}, \quad (1.47)$$

$$V = \frac{n_V \cdot f}{K_J} = \frac{n_V \cdot f}{\frac{2e}{h}}, \quad (1.48)$$

$$R = \frac{R_K}{n_R} = \frac{\frac{h}{e^2}}{n_R}, \quad (1.49)$$

où  $n_U$ ,  $n_V$  et  $n_R$  sont des nombres réels<sup>33</sup>.

La vitesse de translation verticale de la bobine  $v_z = \frac{l_v}{t_v}$  a la dimension d'une longueur divisée par un temps. La longueur d'onde  $\lambda$  du laser de fréquence  $f_L$  de l'interféromètre (traçable à la définition du mètre) est  $\lambda = \frac{c}{f_L}$ . Toute position mesurée par cet interféromètre est un multiple – un nombre réel – de sa longueur d'onde  $l_v = n_{v,1} \cdot \frac{c}{f_L}$ . Comme la fréquence  $f_L$  du laser est un multiple de la fréquence de référence du laboratoire  $f$ , alors  $l_v = n_{v,1} \cdot n_{v,2} \cdot \frac{c}{f}$ . Quant au temps mesuré, c'est un multiple de l'inverse de la fréquence de référence du laboratoire  $t_v = \frac{n_{v,3}}{f}$ . On combine  $l_v$  et  $t_v$ , et on ne conserve qu'un seul facteur d'échelle :

$$v_z = n_v \cdot c, \quad (1.50)$$

où  $n_v$  est un nombre réel.

Enfin, l'accélération de la pesanteur  $g = \frac{l_g}{t_g^2}$  a la dimension d'une longueur divisée par le carré d'un temps. En suivant le même raisonnement, on obtient :

$$g = n_g \cdot c \cdot f, \quad (1.51)$$

où  $n_g$  est un nombre réel.

En combinant les valeurs des cinq grandeurs déterminées précédemment, on écrit :

$$m = \frac{n_U \cdot n_V \cdot n_R}{4 \cdot n_g \cdot n_v} \cdot f \cdot \frac{h}{c^2}, \quad (1.52)$$

33. Dans le paragraphe précédent, nous désignons  $n_U$ ,  $n_V$  et  $n_R$  comme des nombres entiers. Les effets Josephson et Hall quantiques sont des effets quantiques, reposant sur des nombres entiers. Si on souhaite par exemple mesurer une tension de 1 V nominale par comparaison à l'effet Josephson, cela suppose de mettre en série 6908 jonctions Josephson fonctionnant sur la première marche de Shapiro (la fréquence d'irradiation de chacune de ces jonctions est typiquement 70 GHz, produisant alors des marches de tension de  $\frac{2e}{h} = 145 \mu\text{V}$  [112]) : on obtient alors une tension Josephson de 0,999 921 69 V, soit une tension résiduelle de 78,31  $\mu\text{V}$ . Différents artifices expérimentaux permettent d'estimer ce résidu comme une fraction de marche de Shapiro, et d'obtenir finalement que la tension de 1 V corresponde à 6 908,541 0 marches de Shapiro d'une jonction Josephson dont la fréquence d'irradiation est 70 GHz :  $n_U(1 \text{ V}) = 6 908,541 0$ .

Le même raisonnement s'applique pour l'effet Hall quantique : une résistance de 100  $\Omega$  nominale correspond à 258,128 074 4 quanta de résistance  $\frac{h}{e^2}$ .

où  $n_U$ ,  $n_V$ ,  $n_R$ ,  $n_g$  et  $n_v$  sont des réels,  $h$  la constante de Planck (exacte dans le nouveau SI),  $c$  la célérité de la lumière (exacte) et  $f$  la fréquence de référence du laboratoire traçable *in fine* à la définition de la seconde, donc à la fréquence de transition hyperfine du césium-133 au repos.

Cette relation est similaire à celle de de Broglie–Compton donnée plus haut, mais elle fait apparaître les termes mesurés lors d’une expérience de balance du watt.

### 1.2.2.2 Les résultats

En 2014, cinq laboratoires procèdent à une expérience de balance du watt : NRC, NIST, METAS, LNE<sup>34</sup> et BIPM. Le MSL<sup>35</sup> étudie une balance du watt de conception très différente, et le NIM<sup>36</sup> utilise une balance du joule. Plusieurs publications ont passé en revue les différents paramètres de ces balances : Eichenberger (METAS) en 2003 et 2009 [65, 113], et Stock (BIPM) en 2011 et 2013 [114, 115] par exemple. Par ailleurs, Steiner (NIST) en 2013 publia l’article [68] où un exposé très complet des différentes balances du watt est donné.

Un très bref descriptif des différentes balances ayant produit les résultats les plus significatifs est donné ici : nous présentons les résultats obtenus pour  $h$  par ordre chronologique. Quelques valeurs ont été modifiées postérieurement à leur publication initiale : c’est la valeur « finale » que nous reportons ici.

les derniers résultats atteignent des incertitudes relatives inférieures à  $4 \times 10^{-8}$  [94, 116] et les balances du watt *auraient* le potentiel d’atteindre  $1 \times 10^{-8}$  [85].

La première balance du watt fonctionnelle fut conçue par le NPL [117] au début des années 1980, et la première valeur publiée en 1987 correspondait à une mesure dans l’air [118], avec une incertitude-type relative de  $5,5 \times 10^{-7}$  :

$$\text{NPL-1987} \quad \begin{cases} h = 6,626\,068\,8(37) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = -1(55) \times 10^{-8} \end{cases} \quad (1.53)$$

L’élément générant le champ magnétique de 0,7 T est un aimant permanent. Un seul et même mécanisme assure la comparaison de forces (masse étalon 1 kg) et le déplacement de la bobine : un fléau d’environ 1,5 mètre de longueur totale, pivotant sur des couteaux. La bobine est rectangulaire, et son plan est vertical.

Un nouveau résultat fut publié pour la balance du watt du NPL en 1988 [119] et décrit l’année suivante [120], avec une incertitude-type relative de

34. L’expérience française de la balance du watt est rattachée au LCM-LNE/CNAM, désigné dans le reste du manuscrit par l’acronyme générique LNE.

35. Measurement standards laboratory, institut national de métrologie néozélandais.

36. National institute of metrology « Institut national de métrologie » ; institut national de métrologie chinois.

$1 \times 10^{-7}$ . L'incertitude déterminée dans ces deux dernières références fut réévaluée en 1998 [48] et augmentée à  $2 \times 10^{-7}$ . Finalement :

$$\text{NPL-1988} \quad \begin{cases} h = 6,626\,068\,2(13) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = -10(20) \times 10^{-8} \end{cases} \quad (1.54)$$

La balance du watt du NIST (alors connu comme le NBS, National bureau of standards) utilise un solénoïde pour générer le champ magnétique de 2,9 milliteslas et une roue pour assurer la translation verticale de la bobine ainsi que la comparaison de forces (masse étalon 15 g) : elle a pour origine la conversion de la balance ampèremétrique du NBS au début des années 1980 [121]. La bobine est circulaire et son plan est horizontal. La première valeur de constante de Planck fut obtenue en 1989 dans l'air [122, 123], à temps pour l'ajustement des unités électriques de 1990 :

$$\text{NIST-1989} \quad \begin{cases} h = 6,626\,070\,4(88) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 2(13) \times 10^{-7} \end{cases} \quad (1.55)$$

Le désavantage à utiliser une masse de 15 g et un champ de 2,9 mT (comparativement à 1 kg et 0,7 T) apparaît en comparant les deux incertitudes précédentes.

Des modifications très importantes furent effectuées à la balance du watt du NIST à partir de 1989 (« NIST mk II ») : on mentionnera l'utilisation d'un solénoïde supraconducteur, permettant d'obtenir un champ de 0,1 T [124], qui corrige ainsi la principale faiblesse de la version précédente. Cette version est la dernière balance du watt du NIST déterminant la constante de Planck dans l'air : à cet effet, un réfractomètre est construit [125] pour s'assurer de la valeur de l'indice de réfraction de l'air. Les résultats furent publiés en 1998 [126, 127] et décrits en détail en 2005 dans [128]. Alors :

$$\text{NIST-1998} \quad \begin{cases} h = 6,626\,068\,91(58) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 8(87) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.56)$$

Le NIST reconstruit presque entièrement le dispositif expérimental de sa balance du watt [129, 130] pour un fonctionnement sous vide (« NIST mk III »). Par ailleurs, une nouvelle bobine plus rigide fut conçue, de manière à améliorer la corrélation tension – vitesse en phase dynamique [131]. Finalement, ces améliorations permirent au NIST d'obtenir une valeur de constante de Planck avec une incertitude combinée relative de  $5,2 \times 10^{-8}$ , à partir des données d'octobre 2004 à avril 2005 [132] :

$$\text{NIST-2005} \quad \begin{cases} h = 6,626\,069\,01(34) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 23(52) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.57)$$

Peu après, d'autres améliorations des composantes d'incertitude de type B (notamment l'étude de la dérive en masse de leur prototype de platine-iridié) permettent d'obtenir la valeur suivante, à partir des données de 2005 à 2006 [116]:

$$\text{NIST-2007} \quad \begin{cases} h = 6,626\,068\,91(24) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 8(36) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.58)$$

Après les résultats de 1988, la balance du watt du NPL fut également considérablement modifiée [133] (« NPL mk II »): l'ensemble est placé dans une enceinte à vide et la bobine est désormais horizontale et circulaire: les premiers test débutent en 1994 [134], les améliorations se poursuivent (par exemple, description de méthode d'alignement [135]). Enfin, à partir de données d'octobre 2006 à mars 2007, une nouvelle valeur de constante de Planck est obtenue [136]:

$$\text{NPL-2007} \quad \begin{cases} h = 6,626\,070\,95(44) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 316(66) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.59)$$

La suspension de la bobine de la balance du watt du NPL fut modifiée en 2008 de manière à réduire les rotations autour des axes horizontaux [10]. La dernière détermination de constante de Planck par la balance du watt du NPL s'appuie sur des données obtenues de juin 2006 à juin 2009. L'incertitude calculée était alors de  $3,6 \times 10^{-8}$ , mais un problème décelé lors du démontage de la balance obligea à l'augmenter à  $2 \times 10^{-7}$  [137]:

$$\text{NPL-2012} \quad \begin{cases} h = 6,626\,071\,23(133) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 36(20) \times 10^{-8} \end{cases} \quad (1.60)$$

L'institut METAS a débuté un projet de balance du watt en 1997 [138] dont deux caractéristiques sont la compacité et une séparation mécanique des phases dynamiques et statiques. Après 10 ans de développements et d'études [139, 140], de nombreuses améliorations mécaniques [141], un changement d'aimant en 2004 [142] et un suivi du réglage de la bobine qui a permis de réduire la dispersion des données d'un facteur 5 [143], un résultat est finalement publié dans l'air [144] à partir de données obtenues d'avril à août 2010:

$$\text{METAS-2011} \quad \begin{cases} h = 6,626\,069\,1(20) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 4(29) \times 10^{-8} \end{cases} \quad (1.61)$$

Un projet d'évolution de la balance du watt du NPL avait été étudié [145] (« NPL mk III »), mais le NPL décida de cesser l'expérience, et l'ensemble de l'appareil expérimental fut vendu, démonté et transféré au NRC dans un

laboratoire nouvellement construit. Le NRC publia une détermination de la valeur de la constante de Planck en 2012 [77] :

$$\text{NRC-2012} \quad \begin{cases} h = 6,626\,070\,63(43) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 268(65) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.62)$$

En 2014, un numéro spécial « *Watt and joule balances* » de *Metrologia* (volume 51) contenait deux nouveaux résultats de première importance. La balance du watt du NIST fournissait un résultat avec une incertitude-type relative de  $4,5 \times 10^{-8}$  [90]. Quant à celle du NRC (la cause d'incertitude découverte lors du démontage au NPL – liée à l'échangeur de masse – ayant été déterminée [146]) proposait une valeur de  $h$  avec une incertitude-type relative de  $1,8 \times 10^{-8}$  [94] :

$$\text{NIST-2014} \quad \begin{cases} h = 6,626\,069\,79(30) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 141(45) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.63)$$

$$\text{NRC-2014} \quad \begin{cases} h = 6,626\,070\,34(12) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 224(18) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.64)$$

On notera que non seulement l'une de ces deux incertitudes-types relatives est inférieure à  $2 \times 10^{-8}$  mais que ces deux résultats, les meilleurs à ce jour en termes d'incertitude, sont en accord à mieux que 0,1 ppm en valeur relative. Jusqu'à présent, les résultats du NIST étaient éloignés des déterminations récentes de  $h$  : l'accord est désormais meilleur.

Au début de l'année 2015, ces résultats<sup>37</sup> furent corrigés de la dérive de l'unité de masse maintenue au BIPM :

$$\text{NIST-2014}^{\text{cm}} \quad \begin{cases} h = 6,626\,069\,56(30) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 106(45) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.65)$$

$$\text{NRC-2014}^{\text{cm}} \quad \begin{cases} h = 6,626\,070\,11(12) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 189(18) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.66)$$

Enfin, devant la difficulté d'expliquer les différences des deux mesures de la constante de Planck effectuées par la balance du watt du NIST « mark III » (valeurs NIST-2007 et NIST-2014), un nouveau résultat est publié : celui-ci correspond à la moyenne des déterminations de  $h$  effectuée de 2009 à 2014, et

37. Pour la valeur du NIST : [147]. Pour la valeur du NRC, consulter [148].



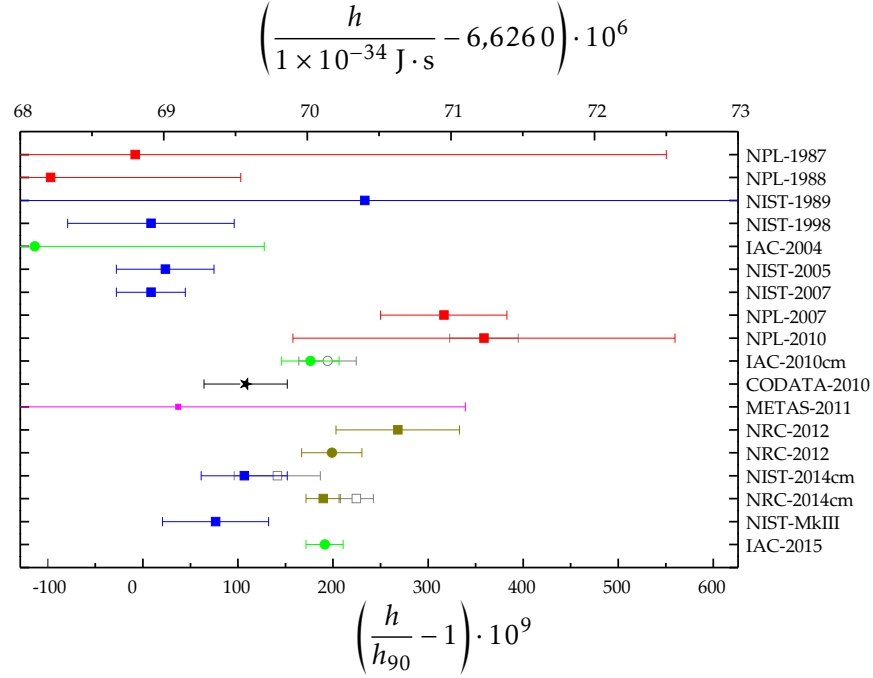


FIGURE 1.5 – Représentation des 17 déterminations de constante de Planck décrites dans ce chapitre (déterminations au moyen d’une balance du watt ou par XRCD), de même que la valeur recommandée CODATA de 2010. Chaque laboratoire est identifié par une couleur, les déterminations de constante de Planck au moyen d’une balance du watt par un carré, et par XRCD par un cercle. Les données en gris représentent les valeurs publiées avant que ne soit connue l’erreur sur l’unité de masse maintenue au BIPM. Pour NPL–2010, elles représentent l’incertitude estimée avant la découverte d’une erreur liée à l’échangeur de masse.

son incertitude, fondée sur celle des résultats NIST–2007 et NIST–2014 et sur leur différence, est de  $5,7 \times 10^{-8}$  [147] :

$$\text{NIST-MKIII} \quad \begin{cases} h = 6,626\,069\,36(37) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 77(57) \times 10^{-9} \end{cases} \quad (1.67)$$

L’ensemble des résultats décrits dans cette section, de même que les valeurs inférées de la constante de Planck déterminées par XRCD, sont représentées FIGURE 1.5 de même que la valeur recommandée CODATA de 2010.

### 1.2.2.3 Les balances en devenir

D’autres balances sont en projet, en construction ou en étude.

Le MSL a le projet depuis 2009 d’une balance oscillante [149], c’est-à-dire dont la bobine en phase dynamique aurait un mouvement sinusoïdal.

De plus, le comparateur de masse serait fondé sur une balance de pression différentielle [150, 151]. Cette balance, très originale, est encore en cours de développement : son circuit magnétique a été conçu [152], mais reste à fabriquer.

Une variante du concept de balance du watt, la balance du joule, a été proposée au NIM en 2005 [153]. Un premier résultat – une preuve de faisabilité – a été obtenu en 2014 [154] : l’incertitude combinée relative est de  $8,9 \times 10^{-6}$ .

La décision de construire une balance du watt au BIPM fut prise à la fin de l’année 2002, et les premiers développements débutèrent en 2005 [155]. En 2011, des résultats préliminaires furent donnés avec une incertitude combinée relative de  $1,3 \times 10^{-5}$ . En effet, de nombreuses composantes de type B n’étaient pas prise en compte ; par ailleurs un problème d’étalonnage d’une résistance fut découvert *a posteriori* [156]. En 2012, l’expérience est transférée dans un nouveau laboratoire et placée dans une enceinte à vide [157].

D’autre part, le METAS développe une seconde génération de balance [158], et le NIST une quatrième version [159, 160].

Le projet de la balance du watt du LNE fut initié en 2000 : il est le support de cette thèse et est décrit dans le chapitre suivant.

### 1.3 Plan du manuscrit

Rappelons l’équation liant la constante de Planck à sa valeur conventionnelle  $h_{90}$  :

$$h = h_{90} \cdot \frac{1}{\frac{U_{90}}{v_z}} \cdot \frac{m \cdot g}{\frac{V_{90}}{R_{90}}}, \quad (1.68)$$

Cette équation présente les termes expérimentaux intervenant directement dans la détermination de la constante de Planck :

- La valeur du facteur géométrique mesuré en phase dynamique  $\left(\frac{U_{90}}{v_z}\right)$  en calculant le rapport de la tension (due au déplacement nominalemt vertical de la bobine) à la vitesse mesurée (nominalemt verticale) ;
- Et la valeur du facteur géométrique mesuré en phase statique  $\left(\frac{m \cdot g}{\frac{V_{90}}{R_{90}}}\right)$  en comparant au poids de la masse étalon (nominalemt sans biais) la composante de la force de Laplace (nominalemt verticale).

Pour établir cette équation, nous avons supposé que :

1. La comparaison du poids de la masse étalon  $m \cdot g$  et de la composante verticale de la force de Laplace au moyen du fléau du comparateur de force s’effectue sans biais. En réalité, cette comparaison n’est exacte qu’à l’incertitude-type relative  $u_r(f)$  près<sup>38</sup>, du fait de l’influence des forces parasites horizontales sur la comparaison de forces ;

38. La lettre  $f$  désignant le fléau du comparateur de forces.

2. La puissance parasite (équation 1.19), qui vaut en terme relatif  $\epsilon_P$  (puissance « non verticale », dues aux forces horizontales, aux moments, aux vitesses linéaires et angulaires) et qui n'est pas corrigée, contribue à la hauteur de  $u_r(P)$  à l'incertitude-type relative sur la détermination de la valeur de la constante de Planck.

Chacun des termes apparaissant dans l'équation 1.68 contribuera donc à l'incertitude-type sur la détermination de la valeur de la constante de Planck. On énumèrera alors également, en plus des termes précédents :

3. L'incertitude-type relative  $u_r(v_z)$  sur la détermination de la vitesse vertical de la bobine déterminée en phase dynamique (typiquement, erreur sur la verticale des faisceaux des interféromètres, erreur sur la détermination de l'indice de l'air) ;
4. L'incertitude-type relative  $u_r(m)$  sur la connaissance de la valeur de la masse en phase statique (typiquement, étalonnage de la masse, erreur sur la correction due à la poussée d'Archimède) ;
5. L'incertitude-type relative  $u_r(g)$  sur la valeur de l'accélération de la pesanteur ;
6. L'incertitude-type relative  $u_r(V_{90})$  sur les mesures de tension effectuées en phase statique et en phase dynamique ;
7. Et enfin l'incertitude-type relative  $u_r(\Omega_{90})$  sur la connaissance de la valeur de la résistance étalon

Les travaux de cette thèse portent plus spécifiquement sur l'évaluation des termes d'incertitudes « mécaniques » suivants :  $u_r(v_z)$  (incertitude-type relative de vitesse),  $u_r(m)$  (incertitude-type relative de masse),  $u_r(f)$  (incertitude-type relative de comparaison de forces) et  $u_r(P)$  (incertitude-type relative de puissance).

L'évaluation de ces incertitudes et enfin de celle d'une détermination de  $h$  est l'objectif principal des recherches décrites dans ce manuscrit : cette détermination vise à participer à la redéfinition du kilogramme et du SI, de manière à fonder nos unités de mesures sur des constantes fondamentales comme décrit dans ce **chapitre 1**.

Dans le **chapitre 2**, nous donnerons le dispositif expérimental de la balance du watt du LNE tel qu'il existait lors de l'été 2014 consacré aux déterminations de  $h$  relatées plus loin. Si cette description ne prétend pas à l'exhaustivité, elle reprend l'ensemble des éléments caractéristiques de l'expérience.

Puis, le **chapitre 3** présente quatre études ayant directement trait à la détermination des termes d'erreur dans l'équation de la balance :

- La mesure du champ de fuite du circuit magnétique permet d'estimer son influence sur la masse étalon dont le matériau est de susceptibilité magnétique non nulle (contribution au terme  $u_r(m)$ ) ;

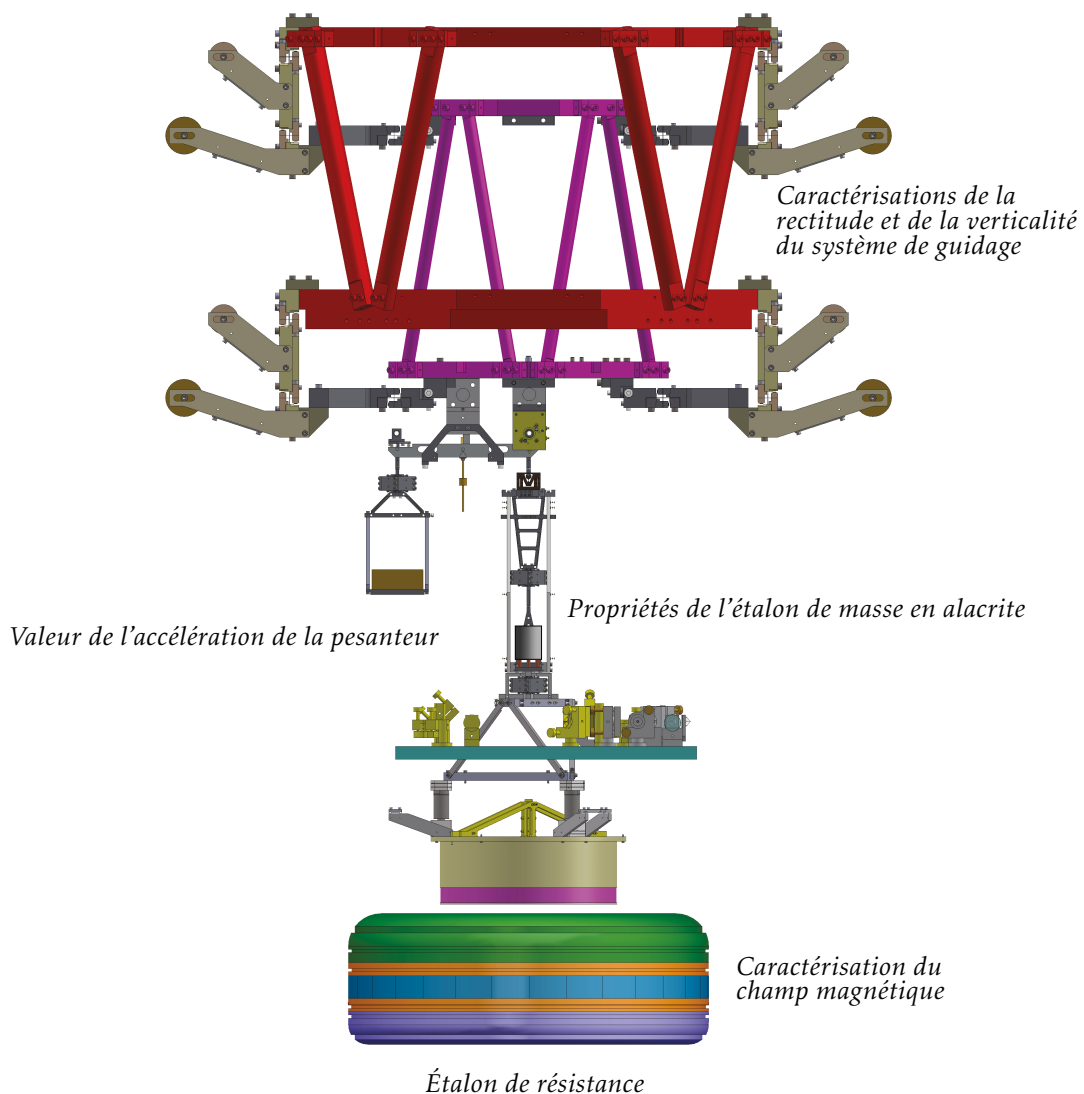
- Une méthode de réglage sur la verticale des faisceaux laser de mesure de vitesse est mise au point et appliquée de manière à estimer  $u_r(P)$  et  $u_r(v_z)$  ;
- L'effet des forces de Laplace horizontales sur le fonctionnement du comparateur de force est estimé (contribution au terme  $u_r(f)$ ) ;
- Enfin, les capteurs de position – permettant d'obtenir les vitesses et les forces parasites de la bobine – sont décrits, modifiés, caractérisés et mis en fonction dans la balance du watt : cette étape est un préambule à la détermination des forces (et donc à  $u_r(P)$  et  $u_r(m)$ ).

Un modèle de la suspension, permettant de déterminer les forces et les moments parasites à partir des déviations angulaires de la suspension avait été imaginé par Villar au LNE [161] : nous appliquons cette méthode dans la balance du watt au **chapitre 4** et nous confirmons ces estimations des forces parasites par la comparaison aux forces évaluées grâce à une méthode utilisant le fléau du comparateur de forces comme un pendule de torsion (contribution aux termes  $u_r(P)$  et  $u_r(f)$ ).

Ensuite, dans le **chapitre 5**, nous décrivons les mesures de la constante de Planck effectuées au LNE au cours de l'été 2014, et nous effectuons un bilan d'incertitudes, où les termes  $u_r(v_z)$ ,  $u_r(m)$ ,  $u_r(P)$  et  $u_r(f)$  sont estimés, de même que les autres termes d'incertitude.

Le **chapitre 6** conclut ce mémoire en donnant les perspectives d'amélioration du bilan d'incertitudes de la balance du watt du LNE.

Cet exposé est complété par quelques documents ancillaires : l'**annexe A** présente les relations et les définitions des unités de base du SI actuel, puis du SI envisagé pour les années futures ; l'**annexe B** décrit la vérification des caractéristiques métrologiques du codeur linéaire utilisé pour étalonner les capteurs de position au chapitre 3 ; l'**annexe C** développe les équations du modèle du double pendule utilisé au chapitre 4 ; finalement l'**annexe D** rappelle les références des publications produites dans le cadre de cette thèse.



La description de l'expérience donnée dans ce chapitre correspond à sa configuration au moment des mesures de la constante de Planck effectuées au LNE au cours de l'été 2014. En sus de la description des locaux (section 2.1.1), de la structure de la balance (section 2.1.2), du comparateur de forces (section 2.1.4), de la bobine (section 2.1.5.1), de l'échangeur de masse (section 2.1.6) et de l'instrumentation (section 2.2), nous citerons comme fondamentaux les **caractérisations de la rectitude et de la verticalité du système de guidage**\* (section 2.1.3.2) qui assure le déplacement nominale-ment vertical de la bobine, la connaissance de la **valeur de l'accélération de la pesanteur** (section 2.1.7.1), celle de la **valeur de la résistance étalon** (évoquée en section 2.2.1), l'étude des **propriétés de la masse en alacrite** utilisée comme étalon (section 2.1.7.2), et les **caractérisations du champ magnétique** (paragraphe c de la section 2.1.5.2) dans lequel plonge la bobine.

\*. Les légendes de la figure apparaissent en italique sur cette figure car elles ont été effectuées antérieurement ou hors du cadre de cette thèse.

---

## Chapitre 2

# Description de la balance du watt du LNE

---

La description donnée dans ce chapitre correspond à la configuration de l'expérience au moment des mesures de la constante de Planck effectuées au LNE au cours de l'été 2014.

Le projet de la balance du watt a été approuvé par le BNM<sup>1</sup> à la fin de l'année 2000, et les grandes lignes de la conception de la balance du watt ont été tracées alors. Les premières ébauches du projet requéraient de choisir pour l'amplitude des grandeurs à déterminer expérimentalement des valeurs aussi proches que possible de celles que l'on peut évaluer avec la meilleure incertitude. Par ailleurs, il avait été également choisi, dès l'origine, de séparer la fonction de pesée et la fonction de translation tout en gardant en permanence la bobine reliée au comparateur de forces. Par conséquent, la bobine et le fléau doivent être déplacés ensemble durant la phase dynamique et un système de translation vertical doit faire partie du dispositif expérimental.

De plus, la construction du nouveau site du LNE à Trappes à la même époque a permis de concevoir des laboratoires spécifiquement adaptés aux exigences de l'expérience.

## 2.1 Dispositif expérimental

### 2.1.1 Locaux

La conception et la construction d'un nouveau laboratoire sur le site LNE de Trappes s'est étendue de 2002 à 2004. Le transfert des activités de recherche en métrologie électrique développées au LCIE<sup>2</sup> a eu lieu en février 2004.

---

1. Bureau national de métrologie.

2. Le Laboratoire commun des industries électriques avait alors en charge la métrologie électrique.

Une attention particulière a été portée à la prise en compte des contraintes environnementales imposées par le dispositif de mesure (vibrations, température, humidité, propreté, gravimétrie...) et celles imposées par le site retenu (vibrations, nature des sols...). Des précautions sont également prises pour s'affranchir des vibrations qui sont générées tant par l'activité interne du bâtiment (couloirs suspendus sur boîtes à ressort, implantation des groupes de climatisation sur dalle séparée, dalles indépendantes pour chaque activité) que par l'activité externe (choix de la meilleure implantation en fonction des relevés de vibration effectués sur le site).

Les locaux dévolus à la balance du watt et au laboratoire de gravimétrie comportent quatre pièces d'une surface totale de l'ordre de 160 m<sup>2</sup>. Elles sont dotées d'un dispositif de contrôle des conditions d'environnement (température et humidité relative). Les désignations, spécifications et usages de chacune des salles sont les suivantes :

- Salle de contrôle : 35 m<sup>2</sup>, ( $20 \pm 0,5$ ) °C. Cette salle joue à la fois le rôle de sas, de salle de rangement et de montage ;
- Salle d'instrumentation, destinée à abriter les équipements de mesure sensibles et l'informatique pilotant la manipulation : 35 m<sup>2</sup>, ( $20 \pm 0,1$ ) °C, ( $50 \pm 5$ ) %HR<sup>3</sup> ;
- Salle gravimétrie : 50 m<sup>2</sup>, ( $20 \pm 0,1$ ) °C, ( $50 \pm 5$ ) %HR ;
- Salle blanche (salle où se situe la balance du watt) : 40 m<sup>2</sup>, ( $20 \pm 0,1$ ) °C, ( $50 \pm 5$ ) %HR, classe 1 000.

La salle blanche et celle des appareils de mesure sont installées à l'intérieur d'une cage de Faraday (atténuation de 40 dB à 60 dB de 1 MHz à quelques GHz).

Deux sondages destinés à caractériser l'état hydrogéologique du sous-sol sont disponibles : le premier est un puits de 7 m de profondeur situé dans le local technique des pompes à l'arrière de la salle de la balance du watt. Le deuxième est un puit extérieur de 45 m de profondeur équipé d'une sonde piézométrique afin de suivre l'évolution de la nappe phréatique des sables de Fontainebleau, située à -33 m [162].

Les deux salles : balance du watt et gravimétrie, comportent deux massifs symétriques en béton (6 m × 5,5 m, épaisseur 2 m, pour une masse de 150 t, FIGURE 2.1), isolés des dalles et murs des bâtiments et supportés chacun par quatre piliers de 12 m de longueur, ancrés dans les couches stables du sous-sol, garantissant une sensibilité minimale aux vibrations et l'assurance d'une horizontalité très stable. Pour ces salles, l'option d'une récupération de l'air par le plancher, supposant une géométrie de dalle complexe, avec pour conséquence des inhomogénéités de l'accélération de la pesanteur  $g$  a été abandonnée au profit d'une récupération latérale au niveau du sol permettant de bénéficier d'une structure de dalle homogène minimisant les variations spatiales de  $g$ .

---

3. Humidité relative de l'air, exprimée en fraction à 100.

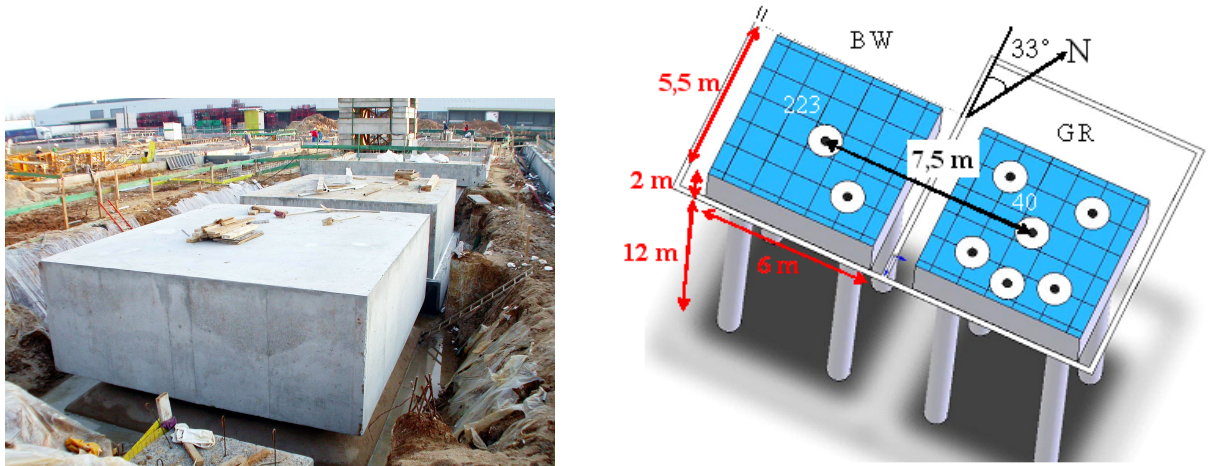


FIGURE 2.1 – *Figure gauche* : Photographie des massifs gravimétrie et balance du watt en béton armé lors de leur construction en 2003. *Figure droite* : Schéma des massifs (gravimétrie « GR » et balance du watt « BW ») et des piliers de béton les supportant. Figure issue de [162].

### 2.1.2 Structure

Afin de maîtriser au mieux la stabilité de la balance, le choix de construction s'est porté sur l'utilisation d'hexapodes et d'octopodes (FIGURE 2.2).

La structure mécanique de la balance du watt comporte un piètement supportant une couronne sur laquelle s'appuie le support destiné à recevoir le circuit magnétique. Une structure octopodale est fixée sur cette même couronne et soutient le dispositif de guidage et son moteur. À la surface inférieure du système de guidage, se trouve le comparateur de forces.

L'ensemble de l'expérience est situé dans une cuve à vide.

#### 2.1.2.1 Cuve à vide et dispositif de manutention

Actuellement utilisé dans l'air, l'ensemble du dispositif est enfermé dans une enceinte qu'il sera possible de mettre sous vide lorsque les mesures l'exigeront.

Cette cuve à vide cylindrique (diamètre 1,3 m et hauteur 2 m), en aluminium comporte dans sa partie basse un nombre suffisant de brides pour permettre le passage des différentes fibres optiques et câbles électriques (FIGURE 2.3). Elle est dotée dans sa partie haute d'une bride de grand diamètre prévue pour fixer un sas d'introduction de masses étalons sous atmosphère contrôlée.

La partie basse de la cuve repose sur le sol par l'intermédiaire d'un hexapode. La partie supérieure en est soulevée par un dispositif de manutention développé au laboratoire et permettant un travail sans entrave autour du dispositif.



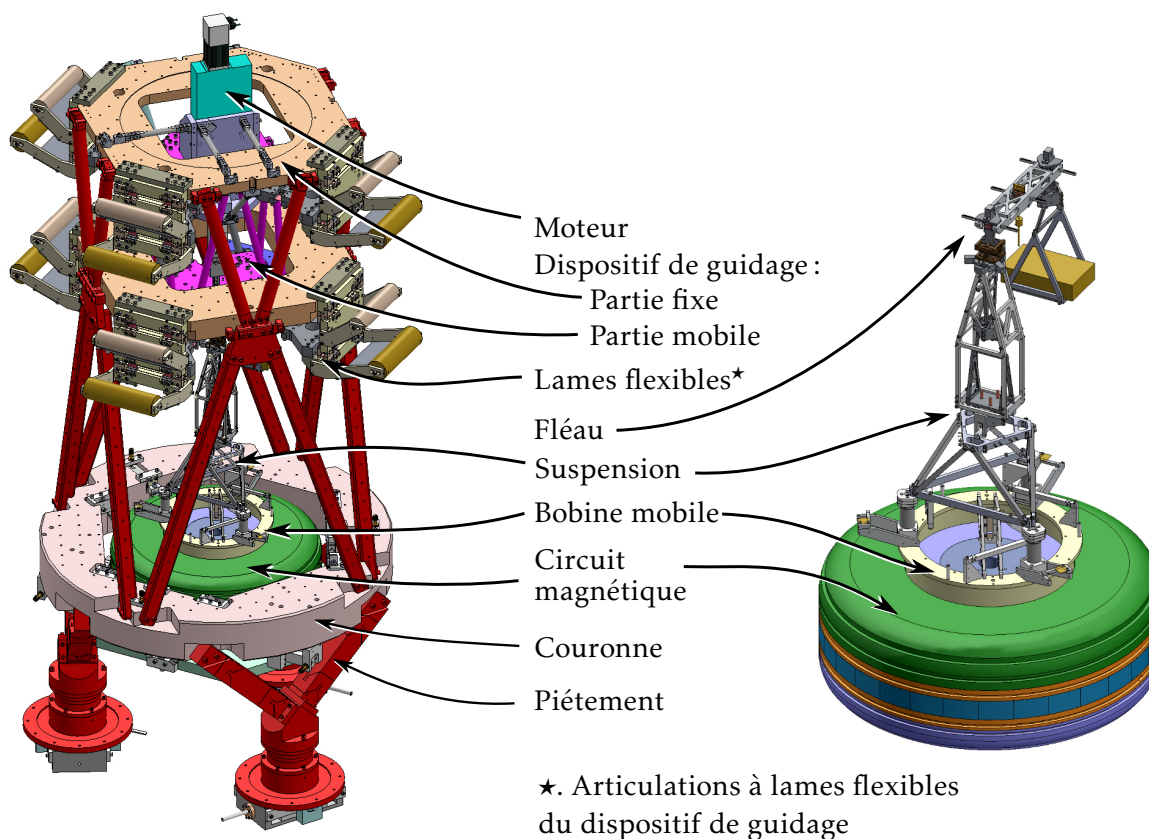


FIGURE 2.2 – Structure de la balance du watt illustrant l'utilisation d'hexapodes et d'octopodes. En rouge, l'hexapode du piètement de la balance, l'octopode de liaison entre la couronne et le premier plateau du système de guidage, et l'octopode de liaison entre les deux plateaux fixes du système de guidage. En rose, l'octopode de liaison entre les deux plateaux mobiles.

Le vide nécessaire est obtenu à l'aide d'un groupe de pompage constitué d'une pompe primaire et d'une pompe turbomoléculaire situé à l'extérieur de la salle et raccordé à la cuve par divers dispositifs de découplage des vibrations mécaniques. Le niveau de vide obtenu est compris dans l'intervalle  $10^{-1}$  Pa à  $10^{-3}$  Pa, similaire à celui qu'il est possible d'obtenir dans le comparateur de masse Mettler M1 utilisé pour l'étude du passage air-vide des étalons de masse.

### 2.1.2.2 Support de circuit magnétique

Pour ajuster la position du circuit magnétique par rapport à la bobine et par rapport à la verticale locale, un support (en vert à la FIGURE 2.4) inséré dans une couronne (gris) a été conçu. Il permet de déplacer le circuit magnétique dans le plan horizontal et d'orienter la direction du champ d'induction par rapport à la verticale locale.



FIGURE 2.3 – Photographie de la cuve à vide lors de la livraison en 2006.

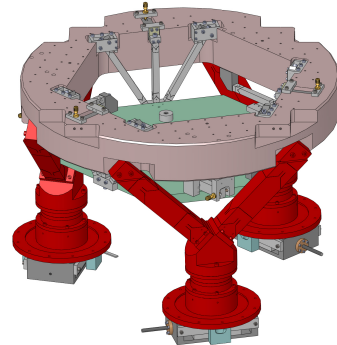


FIGURE 2.4 – Piètement (rouge), couronne (gris) et support du circuit magnétique (vert) permettant un positionnement de l'aimant selon 4 axes de liberté (translations dans le plan horizontal et rotations autour des axes horizontaux)

Ce support comprend un système de mise en position manuel associé à un dispositif mécanique qui permet de le brider sans modifier sensiblement la position et l'inclinaison du circuit magnétique. Ainsi, la rigidité de la liaison entre le support et le circuit magnétique est augmentée et on évite un dérèglement possible du système de mise en position. Les résolutions du système de réglage sont de l'ordre de  $1\ \mu\text{m}$  et  $2\ \mu\text{rad}$ .

La couronne (gris) est posée en trois points sur le sol à travers la cuve à vide. Sa mise à niveau est assurée par trois patins de nivellement (piètement, en rouge). De plus, aux points de traversée de la cuve à vide, des soufflets découplent les déplacements de la cuve à vide de ceux du support du circuit magnétique et plus généralement du dispositif expérimental.

### 2.1.3 Dispositif de guidage

#### 2.1.3.1 Objet

Durant la phase dynamique, le comparateur de forces (fléau et ses suspensions) est déplacé d'un seul bloc au moyen d'un dispositif de guidage (repère 1 de la FIGURE 2.5) actionné par un moteur pas à pas, de façon à ne pas utiliser le fléau comme élément générateur de mouvement.

Le déplacement vertical des plateaux mobiles (assuré par le système de guidage) est asservi, mais le mouvement global doit néanmoins être aussi régulier que possible. Les discontinuités de la force de commande, provoquées par exemple par le jeu et la friction des roulements, doivent être évitées. De

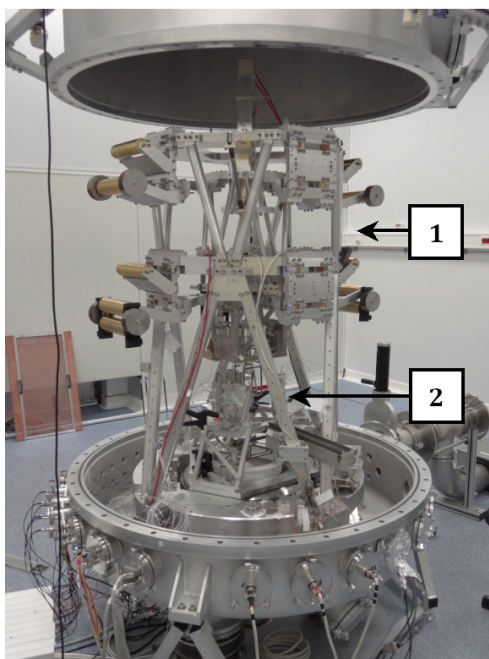


FIGURE 2.5 – Photographie d'ensemble de la balance du watt du LNE. *Repère 1* : dispositif de guidage. *Repère 2* : bobine et comparateur de forces. Sur cette photographie, le plateau optique est une version antérieure de celle décrite en section 2.2.3. Le système d'amenée de masse (section 2.1.6) n'est pas encore présent.

plus, le guidage à longue course doit être compatible vide et amagnétique afin de perturber au minimum la densité de flux magnétique dans lequel la bobine est placée. La solution retenue est d'utiliser des articulations flexibles : la variation de la force de pilotage est bien contrôlée car elle varie continûment comme une fonction de la déformation élastique des articulations. De plus, ce système est compatible vide et peut être réalisé à l'aide de matériaux non magnétiques.

### 2.1.3.2 Description

Le dispositif de guidage repose sur l'utilisation de pivots à lames flexibles [163]. Il comprend des parties fixes et mobiles constituées de deux plateaux parallèles reliés entre eux par des octopodes.

Sa partie mobile est reliée à la partie fixe au moyen de six jambes comportant chacune trois articulations qui contraignent le mouvement selon un seul degré de liberté (FIGURE 2.6) : chacune des trois paires de jambes est placée à  $90^\circ$  de la précédente (la disposition n'est donc pas symétrique). Chaque articulation comprend quatre lames flexibles perpendiculaires deux-à-deux. Cet arrangement en lames croisées permet d'augmenter la raideur transverse du système de translation.

L'ajustement du parallélisme des axes de rotation des pivots permet de réduire les non-linéarités et les rotations parasites du mouvement à des valeurs inférieures à  $1\ \mu\text{m}$  et  $5\ \mu\text{rad}$  [163] pour une trajectoire utile de l'ordre

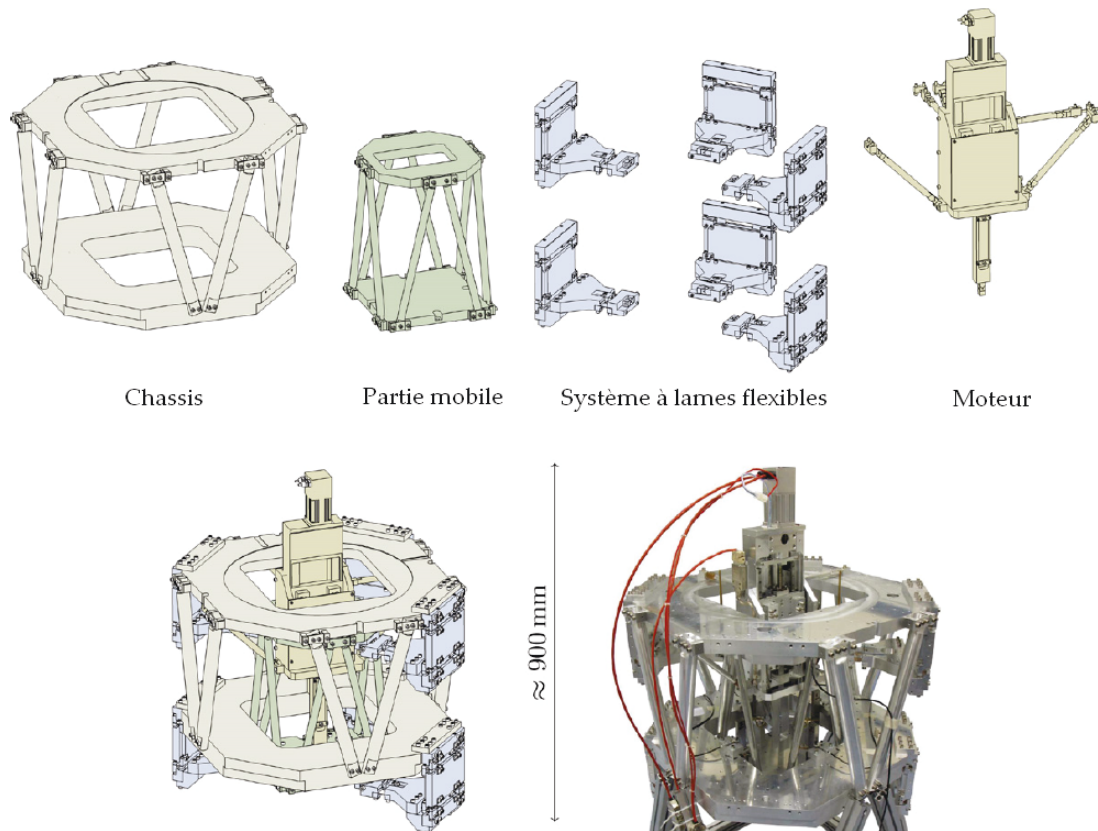


FIGURE 2.6 – Schéma CAO et photographie du système de translation à lames flexibles. La dimension d'ensemble du système est d'environ 700 mm × 700 mm × 900 mm. La partie mobile est présentée à la position où les articulations flexibles ne sont pas déformées. Figure issue de [163].

de 40 mm (le reste de la trajectoire, pour une totalité de 75 mm, est utilisé pour l'accélération et la décélération de la bobine). Le positionnement de l'ensemble du dispositif de guidage sur la structure support du dispositif expérimental, contrôlé avec un inclinomètre, permet d'obtenir cette condition avec une incertitude de quelques microradians.

Tous les éléments du système de translation sont composés d'alliage d'aluminium à l'exception des lames flexibles faites d'un alliage de cuivre et de la visserie en titane.

Bien que le système de translation supporte une masse totale d'environ 15 kg, et qu'il faille déformer les lames flexibles pour le déplacer, un système de compensation à deux contrepoids par jambe flexible permet de réduire la force nécessaire au déplacement de 150 N à moins de 10 N.

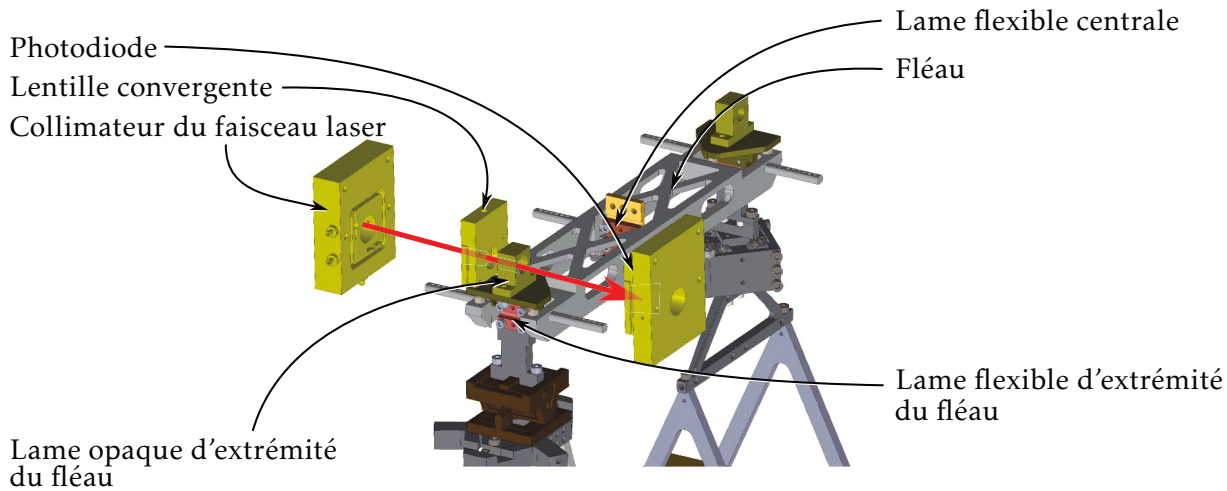


FIGURE 2.7 – Fléau du comparateur de forces et son capteur optique gaussien.

### 2.1.3.3 Moteur

Pour déplacer le système de translation, un moteur pas-à-pas commercial (Aerotech) à longue course (100 mm) est utilisé. Il est contrôlé par sa propre boucle d'asservissement sur un codeur linéaire (gravé au pas de  $4\text{ }\mu\text{m}$  et interpolé 1 000 fois) solidaire du système de translation.

La partie mobile du système de translation est ainsi actionnée par une platine à vis sans fin dont la base est faite d'alliage d'aluminium. L'écrou de la vis sans fin et les guidages linéaires de la platine sont faits d'acier.

## 2.1.4 Comparateur de forces

Le comparateur de forces est constitué d'un fléau et de ses suspensions supportant notamment la masse étalon et la bobine.

Il est fixé à la partie inférieure du système de guidage (FIGURE 2.2).

### 2.1.4.1 Fléau

Le fléau du comparateur de forces, développé spécifiquement pour l'expérience, est symétrique et à lames flexibles [164]. Ses deux bras (longueur  $L_1$  et  $L_2$ ) mesurent chacun 100 mm de long pour une masse d'environ 200 g.

Les 3 pivots sont constitués de lames flexibles pincées en acier inoxydable de  $20\text{ }\mu\text{m}$  d'épaisseur, pour une largeur de 2 cm.

La position angulaire du fléau (inclinaison relative par rapport à l'horizontale) est asservie durant la pesée au moyen d'un capteur optique dont la gamme est ajustée à environ  $30\text{ }\mu\text{m}$  (FIGURE 2.7, capteurs gaussiens décrits en section 2.2.3.3).



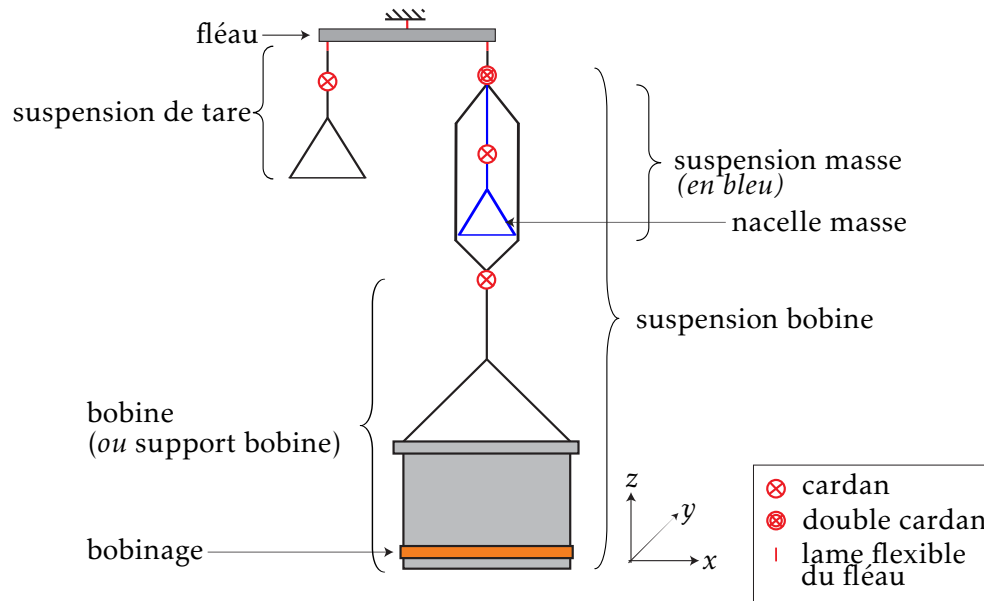


FIGURE 2.8 – Schéma du comparateur de forces : fléau et suspensions. Le comparateur de forces supporte à son extrémité gauche la suspension de tare à deux segments. À son extrémité droite, il supporte la suspension à deux segments de la bobine, ainsi que la suspension à deux segments de la masse étalon. Ces deux suspensions sont reliées par le double-cardan électro-usiné. Notez que : 1) l'axe  $x$  est horizontal et parallèle à l'axe longitudinal du fléau, que 2) l'axe  $y$  qui plonge dans le plan de la figure est horizontal et perpendiculaire à l'axe  $x$  et que 3) l'axe  $z$  est vertical et ascendant.

#### 2.1.4.2 Suspensions

Ce fléau supporte d'un côté une suspension de tare et de l'autre une double suspension. Cette double suspension est constituée d'une part de la suspension destinée à la masse étalon (masse nominale de 500 g) et d'autre part de la suspension de la bobine (FIGURE 2.8).

Une attention particulière a été portée à la réduction des effets de désalignements et des couplages statiques et dynamiques, notamment par l'utilisation de pivots [165–167].

- À l'extrémité du fléau qui soutient la suspension bobine et la suspension de masse, s'exercent deux forces qui doivent être comparées. Pour assurer à la force gravitationnelle (s'exerçant sur la masse étalon) et à la force de Laplace (s'exerçant sur la bobine) le même point d'application, les deux suspensions sont reliées par un double cardan monolithique usiné par électroérosion (FIGURE 2.9) [168]. Constituées de sections rigides, elles sont articulées chacune en leur milieu par un cardan à lames pincées permettant entre autre de minimiser les effets de décentrage de la masse étalon et de réduire les moments parasites exercés sur

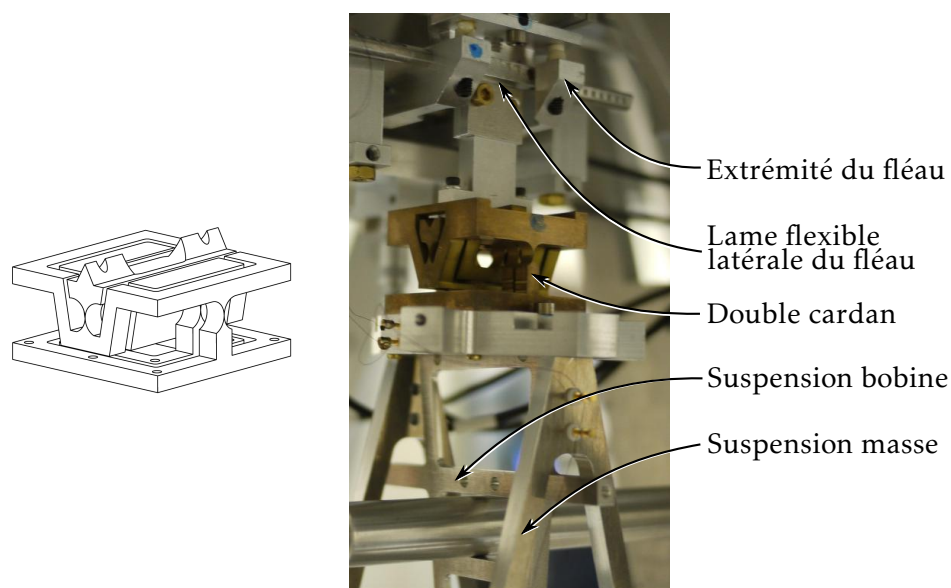


FIGURE 2.9 – *Figure gauche* : Vue CAO du double cardan qui constitue une articulation flexible permettant de relier la suspension masse étalon à la suspension bobine. Sa hauteur est de 16 mm. Figure issue de [168]. *Figure droite* : Photographie du double cardan en situation.

le fléau (du fait de la faible raideur angulaire des cardans). Par ailleurs, l'autocentrage de la masse étalon dans la suspension masse est assurée [169].

- À l'extrémité du fléau qui soutient la suspension de tare, un contre-poids compense à quelques milligrammes près le moment des forces exercées de l'autre côté de la suspension par les poids morts, telle le poids de la bobine. Cette suspension est également articulée en son milieu afin de symétriser aussi parfaitement que possible le comparateur de forces.

La suspension de bobine est donc articulée au moyen de trois pivots (deux cardans et une lame flexible d'extrémité), ce qui permet de distinguer les forces horizontales des moments<sup>4</sup> qui s'exercent sur la bobine en mesurant la déviation angulaire des deux segments de la suspension par rapport à leur position d'équilibre à courant nul. En pratique, on mesure la position et l'inclinaison de la bobine pour obtenir la déviation angulaire des segments [161] (consulter à ce sujet le chapitre 4).

### 2.1.4.3 Principe de la pesée par substitution

L'objet de la phase statique est la comparaison, au moyen du fléau, d'une force gravitationnelle  $m \cdot \vec{g}$  générée par une masse  $m$  soumise à l'accélération

4. Deux pivots sont suffisants pour faire cette différenciation.

de la pesanteur  $\vec{g}$  et d'une force de Laplace verticale  $\vec{F}_z$  s'exerçant sur une bobine de longueur de conducteur  $\ell$ . Cette bobine, soumise à un champ radial  $\vec{B}$  créé par le circuit magnétique, est asservi par un courant continu  $I$  de manière à obtenir l'équilibre du fléau.

Si la force  $\vec{F}_z$  s'applique à l'une des extrémité du fléau, et le poids  $m \cdot \vec{g}$  à l'autre extrémité, dans le cas idéal où la masse du fléau est négligeable, où la position de référence du fléau est l'horizontale, où les forces appliquées sont verticales, où le point d'application des forces sont alignées avec l'axe de rotation du fléau (sans raideur et sans frottements), et où les deux bras du fléau sont de longueur identique  $L_1 = L_2 = L$ , l'expression de l'égalité des moments est :

$$m \cdot \vec{g} \cdot L_1 = \vec{F}_z \cdot L_2 \Rightarrow m \cdot \vec{g} = \vec{F}_z, \quad (2.1)$$

$$m \cdot g = B \cdot \ell \cdot \frac{V}{R}, \quad (2.2)$$

où  $V$  est la chute de potentiel provoquée par la circulation du courant  $I$  dans la résistance  $R$ .

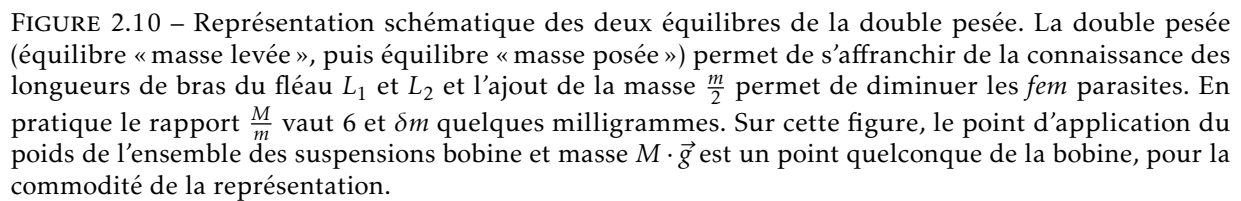
Cette comparaison du poids de la masse étalon  $m \cdot g$  et de la composante verticale de la force de Laplace  $F_z$  doit se faire avec une incertitude relative cible de  $10^{-8}$ . Cela signifie toutefois qu'il faudrait connaître le rapport de longueur des deux bras  $\frac{L_1}{L_2}$  à  $10^{-8}$  près. Alors, pour s'affranchir de la connaissance de la longueur des bras, la comparaison de forces est effectuée par une méthode de comparaisons successives (similaire à la méthode de Borda pour la comparaison des masses) : les deux forces à comparer sont appliquées à l'extrémité du même bras de longueur  $L_2$  (FIGURE 2.10).

Il faut néanmoins que durant la comparaison (entre les deux équilibres successifs), la différence relative de longueur des deux bras du fléau  $\frac{\Delta L_2 - \Delta L_1}{L}$  entre deux pesées (où  $\Delta L_1$  et  $\Delta L_2$  sont les variations de longueur entre deux pesées successives de  $L_1$  et  $L_2$  respectivement, et  $L = L_1 = L_2$  la longueur nominale des deux bras), soit inférieure à l'incertitude cible. Pour cela, la température dans l'environnement du fléau doit être très stable. Bien sûr, l'influence thermique est plus faible lorsque le comparateur de force opère dans le vide.

Le bras de longueur  $L_2$  supportant la masse  $M$  (masse morte  $M$  telle que la masse de la bobine et de sa suspension), un contrepoids est suspendu à l'extrémité de l'autre bras de longueur  $L_1$  pour compenser au mieux le moment dû à  $M$ . Le bras de longueur  $L_1$  supporte alors la masse  $M + \delta m$  ( $\delta m$  étant la différence de masse des deux suspensions, de l'ordre de quelques dizaines de milligrammes).

Le courant qui circule dans la bobine plongée dans le champ du circuit magnétique est asservi de manière à maintenir l'équilibre du fléau à sa position de référence. Ce courant doit être aussi faible que possible afin de réduire la puissance dissipée par effet Joule, source d'effets parasites.





De façon à réduire la force électromotrice parasite dans le circuit électrique, on ajoute en plus de la masse de tare, une masse de valeur nominale  $m/2 = 250$  g à la suspension de tare : alors, un équilibre est réalisé sans la masse étalon (« courant masse levée »,  $I^{\text{ml}}$ ), puis un autre est réalisé avec la masse étalon  $m$  (la valeur nominale de la masse étalon étant de 500 g) dans la suspension (« courant masse posée »,  $I^{\text{mp}} \simeq -I^{\text{ml}}$ ).

La phase statique consiste alors en deux équilibres successifs obtenus en inversant le courant de  $I^{\text{ml}}$  (valeur choisie positive) à  $I^{\text{mp}}$  et donc en changeant le signe de la composante verticale des forces de Laplace :  $F_z^{\text{ml}} \simeq -F_z^{\text{mp}}$ . La réalisation de ces deux équilibres divise par deux le courant circulant dans la bobine, et par quatre de la puissance et présente également l'avantage de diminuer les forces électromotrices parasites (par l'inversion des courants).

Le premier équilibre est réalisé sans la masse étalon (« masse levée », déséquilibre de +250 g). La force de Laplace  $F_z$  est nominale et verticale, et elle s'applique – ainsi que le poids de la suspension  $M$  – au niveau de la lame flexible d'extrémité du fléau.

$$\left(M + \frac{m}{2} + \delta m\right) \cdot g \cdot L_1 = \left(M \cdot g - F_z^{\text{ml}}\right) \cdot L_2 \quad (2.3)$$

Le second équilibre est réalisé avec la masse étalon dans le plateau de la balance (« masse posée », déséquilibre de –250 g).

$$\left(M + \frac{m}{2} + \delta m\right) \cdot g \cdot L_1 = \left(m \cdot g + M \cdot g - F_z^{\text{mp}}\right) \cdot L_2 \quad (2.4)$$

où  $F_z^{\text{ml}}$  est négatif ( $\vec{F}_z^{\text{ml}}$  descendant) tandis que  $F_z^{\text{mp}}$  est positif ( $\vec{F}_z^{\text{mp}}$  ascendant).

La différence de ces deux équations mène à :

$$m = \frac{F_z^{\text{mp}} - F_z^{\text{ml}}}{g} = \frac{F_z}{g} \quad (2.5)$$

$$= \frac{(B \cdot \ell)}{g} \cdot (I^{\text{mp}} - I^{\text{ml}}) = \frac{(B \cdot \ell)}{g} \frac{V}{R} \quad (2.6)$$

où  $V = V^{\text{mp}} - V^{\text{ml}}$  est la différence de potentiel aux bornes de la résistance  $R$  due aux courants  $I^{\text{mp}}$  et  $I^{\text{ml}}$ . On détermine donc en phase statique la valeur du facteur géométrique à l'altitude de pesée :

$$(B \cdot \ell)_{\text{stat}} = \frac{m \cdot g}{I} = \frac{m \cdot g}{\frac{V}{R}}. \quad (2.7)$$

Le facteur géométrique<sup>5</sup>  $(B \cdot \ell)$  de l'ensemble bobine – circuit magnétique valant  $536,3 \text{ N} \cdot \text{A}^{-1}$ , et l'accélération de la pesanteur  $g$  valant  $9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,

5. La valeur donnée ici pour  $(B \cdot \ell)$  n'a été disponible que lorsque les premières phases statiques et dynamiques ont pu être réalisées en 2012.

on peut calculer les valeurs nominales des courants et des tensions de pesées, en considérant le défaut de masse  $\delta m$  nul :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{configuration « masse levée »} \\ \text{déséquilibre} \simeq +\frac{m}{2} \simeq +250 \text{ g} \\ I^{\text{mp}} = +4,57 \text{ mA} \\ V^{\text{mp}} = +0,914 \text{ V} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{configuration « masse posée »} \\ \text{déséquilibre} \simeq -\frac{m}{2} \simeq -250 \text{ g} \\ I^{\text{ml}} = -4,57 \text{ mA} \\ V^{\text{ml}} = -0,914 \text{ V} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Enfin, les courants et les tensions nominaux de la double pesée s'obtiennent par la différence des valeurs précédentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{« double pesée »} \\ \text{déséquilibre} = +m = +500 \text{ g} \\ I = I^{\text{mp}} - I^{\text{ml}} = +9,14 \text{ mA} \\ V = V^{\text{mp}} - V^{\text{ml}} = +1,83 \text{ V} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Nous avons ici fait l'hypothèse que la force de Laplace est purement verticale, et cela dans les deux phases de la pesée :  $\vec{F}^{\text{mp}} = \vec{F}_z^{\text{mp}}$  et  $\vec{F}^{\text{ml}} = \vec{F}_z^{\text{ml}}$ . Dans ce cas, l'égalité des moments des forces qui équilibrent le fléau correspond simplement à l'égalité des forces appliquées (équations 2.3 et 2.4). L'influence des forces horizontales sur le fléau sera déterminée au chapitre 3, et la détermination des forces et moments parasites au chapitre 4.

### 2.1.5 Circuit magnétique et bobine

Les caractéristiques du circuit magnétique et de la bobine ont été définies de façon à obtenir tension  $V$  de 1 V pour la phase statique et une *fem*  $U$  de 1 V avec pour la phase dynamique. En effet, la mesure d'une tension de 1 V à l'aide de réseau programmable de Josephson est particulièrement bien maîtrisée.

Toutefois, l'utilisation d'aimants permanents pour le circuit magnétique le rend sensible aux variations de température, les courants circulant dans la bobine doivent être limités à quelques milliampères en phase statique. Équilibrer la moitié du poids de la masse étalon dans ces conditions oblige, à moins d'utiliser une bobine de très grande longueur de fil (qui annulerait du fait de sa résistance, l'avantage que confèrent les faibles courants vis à vis de l'effet Joule), à disposer d'une induction magnétique de forte amplitude.

Ainsi, il a été décidé de concevoir un circuit magnétique permettant de disposer d'un champ radial de valeur nominale 1 T, et d'utiliser la bobine décrite ci-dessous.

Alors, la vitesse de translation  $v_z$  de la phase dynamique est de  $2 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  pour obtenir aux bornes de la bobine une *fem* de 1 V.



FIGURE 2.11 – Photographie du circuit magnétique. Diamètre extérieur 550 mm. Figure issue de [171].

#### 2.1.5.1 Bobine

L'ensemble bobine – circuit magnétique a donc été conçu de façon à pouvoir générer une force suffisante pour équilibrer la moitié du poids de la masse étalon sans générer de dégagement de chaleur rédhibitoire dans le circuit magnétique.

La bobine est composée de 580 m de fil de cuivre enroulé en 8 couches concentriques de 22 mm de haut et de 86 tours sur un support en Delrin d'un diamètre moyen de 268 mm. Le fil de cuivre, isolé par 15  $\mu\text{m}$  de polyesteramide THEIC, a un diamètre de 250  $\mu\text{m}$  [170] et sa résistance est de 170  $\Omega$ . Cette configuration limite la puissance dégagée par le courant de 5 mA parcourant la bobine à quelques 5 mW, réduisant ainsi l'influence du coefficient de température du samarium-cobalt du circuit magnétique sur la valeur du champ d'induction.

#### 2.1.5.2 Circuit magnétique

Le circuit magnétique est visible en situation FIGURE 2.2 et en photographie à la FIGURE 2.11.

**a. Objet** Les premières modélisations par la méthode des éléments finis ont permis de déterminer les caractéristiques géométriques du circuit magnétique nécessaire à la génération d'un champ radial de 1 T dans un entrefer dont le diamètre moyen est égal à 27 cm. Ce dernier permet un déplacement utile de la bobine de 40 mm. Par ailleurs, le champ doit présenter au milieu de l'entrefer un minimum qui définit l'endroit où sera placée la bobine en phase statique, de façon à diminuer la sensibilité aux erreurs de positionnement verticaux de cette dernière. Le profil obtenu présente en effet un minimum relatif de l'ordre de  $1 \times 10^{-4}$  au milieu de la profondeur de l'entrefer.

En phase dynamique, la variation de champ d'induction correspond à 100  $\mu\text{V}$  induits aux bornes de la bobine, soit une variation de tension inférieure à une marche de tension Josephson (140  $\mu\text{V}$ , voir section 2.2.1).

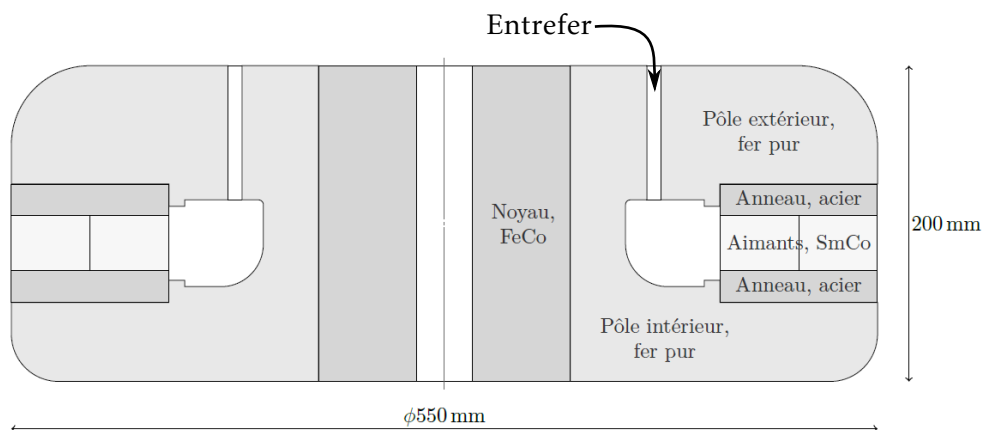


FIGURE 2.12 – Coupe radiale du circuit magnétique. Pour une meilleure lisibilité, certaines arêtes sont cachées. L'entrefer utile est le volume de forme torique délimité par deux surfaces cylindriques appartenant respectivement au pôle intérieur et au pôle extérieur. Le diamètre extérieur et la hauteur du circuit sont respectivement égaux à 550 mm et 200 mm. La masse totale est de l'ordre de 350 kg. Figure issue de [171].

**b. Constitution** Le circuit magnétique, de type aimant de haut-parleur (FIGURES 2.11 et 2.12), est constitué :

- D'une couronne de 60 aimants permanents samarium-cobalt  $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$  insérée entre deux anneaux de maintien en fer XC48 ;
- D'un pôle magnétique extérieur en fer pur (Armco) qui constitue la face externe de l'entrefer.
- Du pôle magnétique intérieur en fer pur qui constitue la face interne de l'entrefer. Cette pièce comporte en son centre un noyau d'alliage fer-cobalt dont l'induction à saturation atteint 2,38 T. Le noyau est percé lui-même en son centre (diamètre 30 mm).
- Et d'une bague de positionnement (calibre en aluminium) qui permet de positionner les pôles l'un par rapport à l'autre.

La géométrie des pôles magnétiques a été spécialement conçue pour concentrer le champ magnétique dans l'entrefer (champ d'induction radial de l'ordre de 0,94 T) : on obtient un profil en selle de cheval le long de la direction verticale dans cet entrefer circulaire de diamètre moyen de 27 cm et de hauteur 9 cm. La géométrie du circuit magnétique, le choix des différents matériaux, l'influence de la magnétostriction, l'usinage et le montage ont été décrits dans [171, 172].

Le circuit magnétique supporte par ailleurs la structure à laquelle seront fixés trois interféromètres et trois capteurs de position (voir section 2.2.3).

**c. Caractérisation** Des expériences ont été réalisées, avant le positionnement de l'aimant dans la balance, au moyen d'un capteur à effet Hall adapté

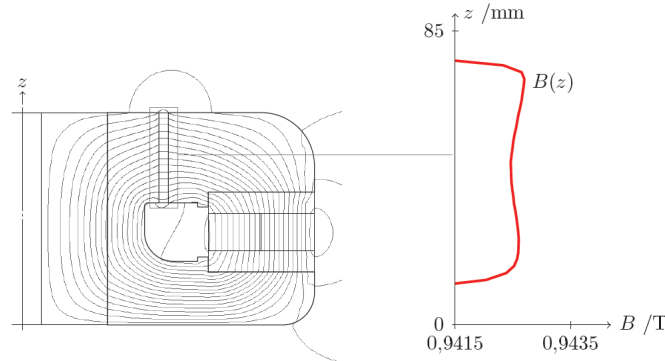


FIGURE 2.13 – Mesure de l'intensité du champ d'induction dans l'entrefer en fonction de la position  $z$ . Figure issue de [171].

pour mesurer le profil du champ magnétique dans l'entrefer du circuit magnétique. La sensibilité de la sonde, de l'ordre de  $1 \times 10^{-5}$  T est suffisante pour mesurer l'homogénéité spatiale du champ qui est supposée être de l'ordre de  $1 \times 10^{-4}$  T. La FIGURE 2.13 montre la variation du champ magnétique le long de la direction verticale. Les mesures montrent le minimum du profil et l'homogénéité du champ attendus.

Par ailleurs, une machine tournante spécialement conçue [173] a été utilisée pour mesurer :

- La géométrie de l'entrefer à l'aide de capteurs capacitifs ;
- L'intensité du champ magnétique à l'aide d'une sonde à effet Hall ;
- La direction du champ magnétique à l'aide d'un capteur à effet Faraday [174] .

Ces mesures *ex situ*, en utilisant la face supérieure de l'aimant comme référence, ont permis durant le montage de l'aimant dans la balance du watt, d'aligner le plan de son champ magnétique radial sur l'horizontale avec une incertitude de  $10 \mu\text{rad}$  [173, 174].

**d. Dépendance en température** Le samarium-cobalt utilisé dans les aimants permanents du circuit magnétique, qui présente l'avantage de générer une forte et permanente induction magnétique dans l'entrefer, est sensible aux variations de température. Cette dépendance en température s'exprime par  $\alpha = \frac{1}{\Delta T} \cdot \frac{\Delta B}{B}$ , où  $\Delta B$  est la variation de l'induction magnétique  $B$  associée au changement de température  $\Delta T$ , et est environ égale à  $-3 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  [171].

À une variation de température des aimants aussi petite que le millikelvin correspond une variation relative de l'induction magnétique de  $3 \times 10^{-7}$ . Il n'est donc pas possible de s'affranchir des variations de température de l'aimant sur des durées longues : une méthode d'interpolation, en alternant les phases statiques et les phases dynamiques, sera utilisée (chapitre 5).

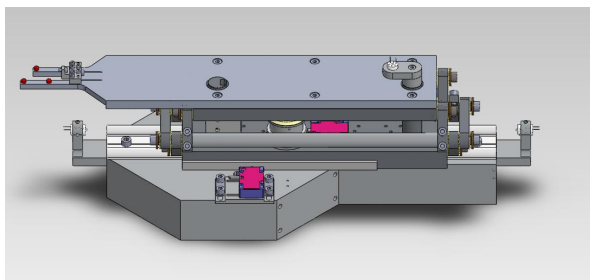


FIGURE 2.14 – Vue CAO de l'échangeur de masse.

**e. Champ magnétique de fuite** L'induction magnétique dans l'entrefer du circuit magnétique est de 0,94 T : l'imperfection du confinement du champ magnétique dans l'entrefer implique l'existence d'un champ au point où se situe la masse étalon (environ 35 cm au dessus du circuit magnétique, dans son axe de révolution).

Ce « champ de fuite », compte tenu de la susceptibilité magnétique volumique de la masse étalon utilisée, induit une force magnétique verticale  $F_\chi$  qui vient s'ajouter à son poids.

Ce champ de fuite a été mesuré (voir chapitre suivant), et sa contribution à l'incertitude sur la détermination de masse déterminée.

### 2.1.6 Échangeur de masse

Un système (FIGURE 2.14) a été développé pour apporter la masse jusqu'à la nacelle entre la phase statique et la phase dynamique ainsi que pour la lever et l'abaisser au moment opportun lors de la phase statique : la translation horizontale peut être de 170 mm, et la verticale de 6 mm.

Le mouvement horizontal est guidé au moyen d'une glissière commerciale tandis que la linéarité du mouvement vertical est assurée par un pantographe. Pour les deux mouvements, des moteurs piézo-électriques linéaires sont utilisés en boucle fermée à l'aide d'encodeurs linéaires à haute résolution (pas de gravure 10  $\mu\text{m}$ ).

Le réglage de l'inclinaison de l'échangeur de masse conjugué à la possibilité de réduire la vitesse verticale à une valeur aussi faible que 10  $\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  permettent de réduire au minimum les oscillations de la nacelle de masse lors de la pose et de la dépose de l'étalon.

Ce réglage de l'inclinaison consiste à rendre parallèle le plan de la face inférieure du cylindre de la masse étalon placée sur l'échangeur de masse et le plan formé par les trois tiges qui accueillent la masse sur la nacelle.

### 2.1.7 Poids

Enfin, la connaissance du poids de la masse étalon demande de connaître la valeur de l'accélération de la pesanteur  $g$  en son centre de gravité ainsi

que la valeur de cette masse. Cette grandeur doit être connue en permanence, la variation quotidienne de  $g$  (marées terrestres) étant de quelques  $10^{-7}$  en valeur relative.

#### 2.1.7.1 Gravimétrie : accélération de la pesanteur

La valeur absolue de l'accélération de la pesanteur  $g$  est tout d'abord mesurée en un point particulier (repère 40 de la FIGURE 2.1) situé dans une pièce voisine de celle où réside la balance du watt avec un gravimètre absolu reposant sur une expérience d'interférométrie atomique utilisant des atomes froids de rubidium-87 [175, 176] fonctionnant depuis 2009. Ce gravimètre a été comparé régulièrement avec d'autres gravimètres absolus, en particulier dans les trois dernières comparaisons clefs (*key comparisons*) [177, 178]. La valeur absolue de  $g$  est déterminée par le gravimètre avec une incertitude-type relative de  $4,3 \times 10^{-9}$ .

Deux opérations supplémentaires sont nécessaires pour transférer cette valeur au centre de gravité de la masse étalon (repère 223 de la FIGURE 2.1) :

- Une cartographie gravimétrique tridimensionnelle du site, combinée avec un modèle du champ gravitationnel des laboratoires permet de transférer la valeur absolue de  $g$  au centre de masse de la masse étalon de la balance du watt. Cette étude a permis, au moyen d'un gravimètre relatif de type Scintrex CG5, de caractériser l'ensemble du volume des deux salles contigües où sont situées le gravimètre absolu et la balance du watt et de connaître les variations de l'accélération de la pesanteur avec une incertitude-type relative de l'ordre de  $10^{-9}$  [179].
- Enfin, l'auto-attraction de la balance elle-même (c'est à dire l'influence des masses qui la composent sur la valeur de  $g$  – la contribution la plus significative étant liée à la présence voisine du circuit magnétique) est prise en compte en utilisant les méthodes développées pour le calcul de l'auto-attraction du gravimètre absolu [180] : cet effet est déterminé avec une incertitude-type relative de l'ordre de  $10^{-9}$ .

#### 2.1.7.2 Masse

Les masses étalons de la balance du watt sont raccordées au prototype national français n° 35 au moyen du comparateur du LNE de type Mettler M1. Les contraintes imposées par l'expérience rendent cependant délicate l'utilisation de matériaux traditionnels, en raison en particulier de leur susceptibilité magnétique.

Pour cette raison, plusieurs études (notamment [25, 181]) ont été effectuées sur la recherche de nouveaux matériaux. Les critères de sélection portèrent à la fois sur les aspects mécaniques (dureté, facilité de polissage), magnétiques (faible susceptibilité) et de passivité de surface, ce dernier point conditionnant le comportement des masses lors du passage air-vide qu'il sera nécessaire de connaître in fine. Les études montrent que l'iridium pur (et dans une



moindre mesure le platine iridié – notamment en raison d’une susceptibilité magnétique plus élevée) est l’un des matériaux susceptibles de satisfaire à tous ces critères.

Avant que de telles masses ne soient utilisées, un matériau plus classique tel que l’Alacrite XSH a été utilisé dans la campagne de mesure de 2014. Ce superalliage est composé principalement de cobalt, les éléments restants étant 20 % de chrome, 15 % de tungstène, 10 % de nickel et 0,1 % de carbone. Sa densité est de  $9\,150\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  [182, p. 202] et sa susceptibilité magnétique volumique de  $1,34 \times 10^{-3}$ .

L’étalon de 500 g en Alacrite utilisé lors des mesures de  $h$  décrites dans cette thèse a été fourni par la société française Aubert-et-Duval. Cet étalon de masse a été poli et ajusté au CNAM dans les années 1980.

Sa stabilité de masse, étudiée pendant des années, est comparable à celle des meilleurs étalons de platine iridié [183, 184].

Un schéma reprenant l’ensemble des éléments principaux de la balance du watt est donné en FIGURE 2.15.

## 2.2 Instrumentation

### 2.2.1 Mesures de tension et d’intensité

En phase statique, le courant de pesée qui circule dans la bobine est mesuré par la chute de tension qu’il provoque aux bornes d’une résistance  $R = 200\ \Omega$ . Celle-ci, constituée de deux résistances de  $100\ \Omega$  en série placées dans une enceinte à air et régulées en température ( $\pm 10\text{ mK}$ ), est étalonnée par comparaison à l’étalon quantique de résistance.

En phase dynamique, la tension induite est directement mesurée aux bornes de la bobine.

Ces mesures nécessitent de commuter les branchements des voltmètres, de la bobine et de la résistance lors de l’alternance des phases statiques et dynamiques. Ces modifications sont assurées par des ensembles d’interrupteurs très faibles *fem*.

Trois voltmètres Agilent 3458A, étalonnés par l’intermédiaire d’une diode Zener, sont utilisés séquentiellement pour déterminer les chute de tensions aux bornes de la bobine (en phase dynamique) et aux bornes de la résistance étalon (en phase statique).

La référence Zener est elle-même étalonnée périodiquement par comparaison à un étalon Josephson disponible au laboratoire Josephson du LNE, distant de quelques dizaines de mètres.

### 2.2.2 Asservissement de la position du fléau

Durant la phase statique (pendant les deux équilibres de la double pesée), le courant circulant dans la bobine est ajusté en permanence par un contrôleur

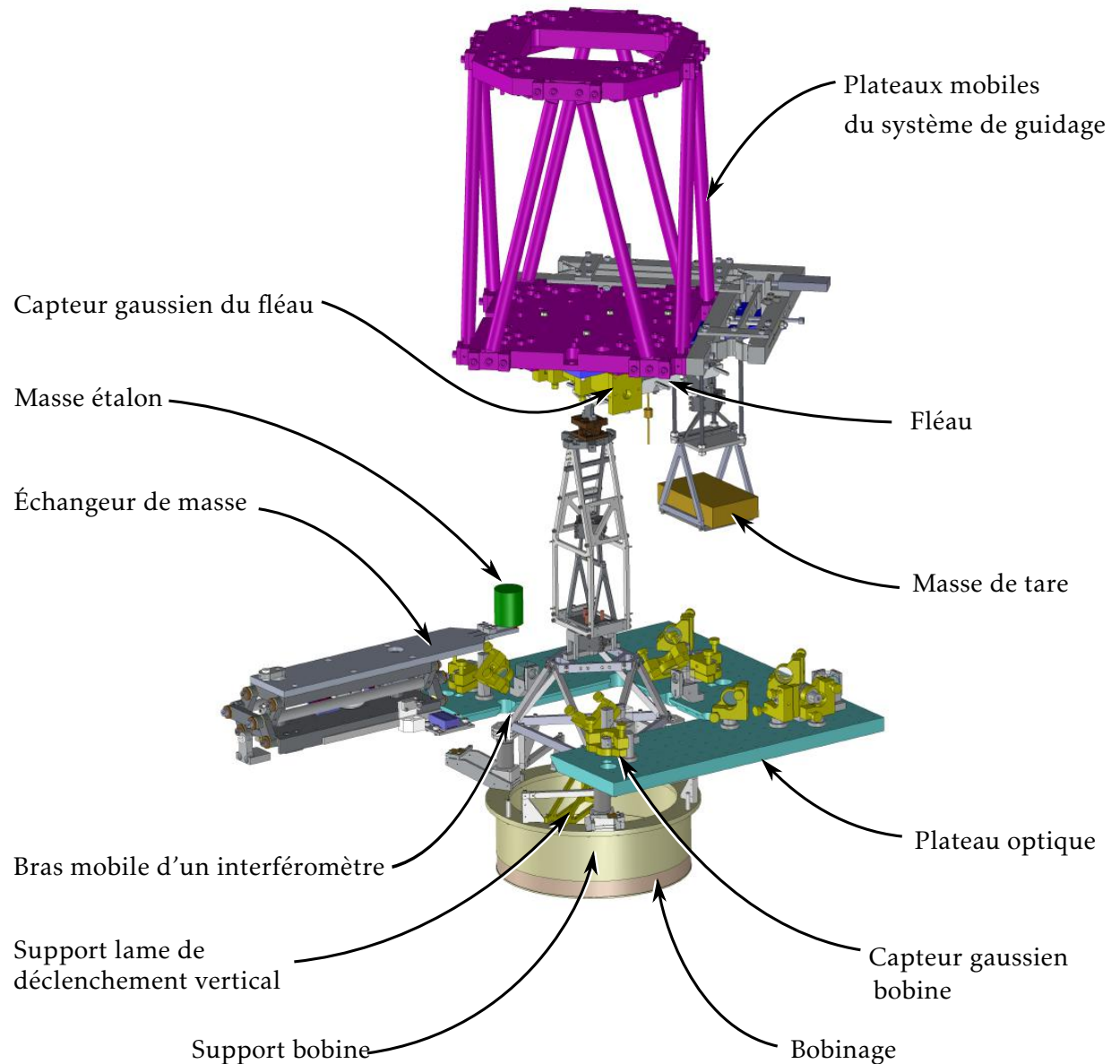


FIGURE 2.15 – Vue CAO des principaux éléments constituant l'expérience de la balance du watt. La bobine, fixée à l'extrémité d'une suspension, est reliée au fléau du comparateur de forces. Ce fléau supporte à son autre extrémité une masse de tare. Le déplacement vertical de la bobine s'effectue en déplaçant la lame centrale du fléau, lame solidaire des plateaux mobiles déplacés par le système de guidage (non représenté sur cette figure). *En phase statique*, la masse étalon est posée et levée à l'aide d'un échangeur de masse : l'inclinaison sur l'horizontale du fléau est contrôlée à l'aide d'un capteur gaussien scrutant son extrémité. *En phase dynamique*, les mesures sont déclenchées par un capteur gaussien repérant la position verticale de la bobine par rapport au circuit magnétique (au moyen de la « lame de déclenchement vertical ») tandis que la vitesse verticale de la bobine (et ses vitesses angulaires) sont mesurées à l'aide de 3 interféromètres aux faisceaux verticaux, dont les bras mobiles visent des coins de cube disposés à  $120^\circ$  sur le périmètre de la bobine. *Dans les deux phases*, les mouvements de la bobine (dans le plan horizontal et autour de l'axe vertical) sont mesurés au moyen de capteurs gaussiens les mouvements de la bobine autour des axes horizontaux étant déterminés au moyen des interféromètres précédemment décrits.

temps-réel comprenant un algorithme proportionnel-dérivé pilotant une source de courant de manière à asservir la position angulaire relative de l'extrémité du fléau supportant la suspension de masse (FIGURE 2.7). Cette source de courant est une source programmable à très faible bruit, et est asservie de façon à assurer l'équilibre du fléau pendant la phase statique.

La détection de la position du fléau est assurée par un capteur gaussien [185] de dynamique 30  $\mu\text{m}$ , solidaire des plateaux mobiles de translation, qui détermine le mouvement vertical de l'extrémité du fléau. Le principe de ce capteur est développé au chapitre 3.

La stabilité du courant en pesée n'est pas limitée par la source de courant, mais sera imposée par les conditions expérimentales et notamment par le bruit et la dérive du capteur gaussien d'extrémité du fléau.

### 2.2.3 Mesures de vitesse et de position de la bobine

#### 2.2.3.1 Principe

La bobine (autrement dit le segment inférieur de la suspension) ayant six degrés de liberté, la détermination de ses positions et vitesses nécessite *a minima* six capteurs.

Les positions de la bobine dans l'espace sont repérées par les grandeurs  $x$ ,  $y$  et  $z$ , tandis que les positions angulaires correspondantes sont  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  et  $\beta_z$  (FIGURE 2.16). L'axe  $z$  est vertical et pointe vers le haut, tandis que l'axe  $y$  est dans l'axe du fléau (non représenté sur cette figure) et pointe de la lame centrale vers la lame de suspension masse. Les vitesses correspondantes sont notées  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et enfin  $\omega_z$ .

Trois interféromètres hétérodynes de type Michelson (section 2.2.3.2, [186]) sont utilisés pour déterminer la fréquence Doppler correspondant à la vitesse de trois points régulièrement répartis sur le pourtour du support de bobine et matérialisés chacun par un réflecteur à coin de cube. Les interféromètres mesurent par intégration de la phase optique à l'aide d'une carte FPGA et de comparateurs phase-fréquence les positions verticales  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ . Une transformation matricielle permet d'obtenir la position verticale de la bobine  $z$  et ses positions angulaires  $\beta_x$  et  $\beta_y$  à partir de  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  ; puis une dérivation permet ensuite d'obtenir la vitesse verticale de la bobine  $v_z$  et ses vitesses angulaires  $\omega_x$  et  $\omega_y$  :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Trois capteurs de position sont utilisés pour déterminer les positions  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  du bord de lames opaques solidaires de la bobine. Leur principe repose sur les propriétés de propagation des faisceaux laser gaussiens. Une autre transformation matricielle permet d'obtenir la position de la bobine dans le

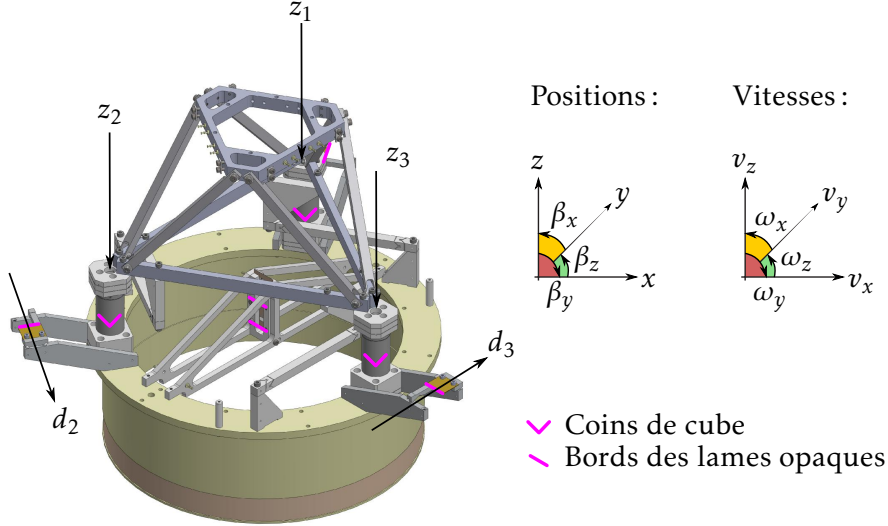


FIGURE 2.16 – Position des six capteurs sur la bobine : Les 3 faisceaux verticaux des interféromètres mesurent les positions ( $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ ) de 3 coins de cube solidaires de la bobine : on peut alors déterminer les positions ( $z$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ ) et les vitesses ( $v_z$ ,  $\omega_x$  et  $\omega_y$ ). Les 3 capteurs gaussiens mesurent les positions de chacune des 3 lames opaques par rapport à une position de référence propre à chacune de ces lames ( $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$ ) : on peut alors déterminer les positions ( $x$ ,  $y$  et  $\beta_z$ ) et les vitesses ( $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$ ). Par souci de visibilité, la mesure  $d_1$  n'a pas été représenté. De plus, une lame disposée verticalement près de l'axe de la bobine permet de déclencher les mesures en phase dynamique à une distance constante du circuit magnétique.

plan horizontal  $x$  et  $y$  et sa position angulaire autour de l'axe vertical  $\beta_z$  à partir des informations des capteurs gaussiens  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  ; puis une dérivation permet ensuite d'obtenir la vitesse de la bobine dans le plan horizontal  $v_x$  et  $v_y$  et sa vitesse angulaire autour de l'axe vertical  $\omega_z$  :

$$\begin{cases} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \\ y \\ \beta_z \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{cases} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{cases} \quad (2.11)$$

Ainsi, grâce à l'utilisation conjointe des trois interféromètres et des trois capteurs de position, le mouvement de la bobine (positions et vitesses) peut être connu selon ses six degrés de liberté.

Les informations de vitesse verticale  $v_z$  en chaque point de la trajectoire  $z$ , associée à la mesure de la tension  $U$  aux bornes de la bobine permettent d'obtenir le profil de champ en phase dynamique :

$$(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}(z) = \frac{U(z)}{v_z(z)} \quad (2.12)$$

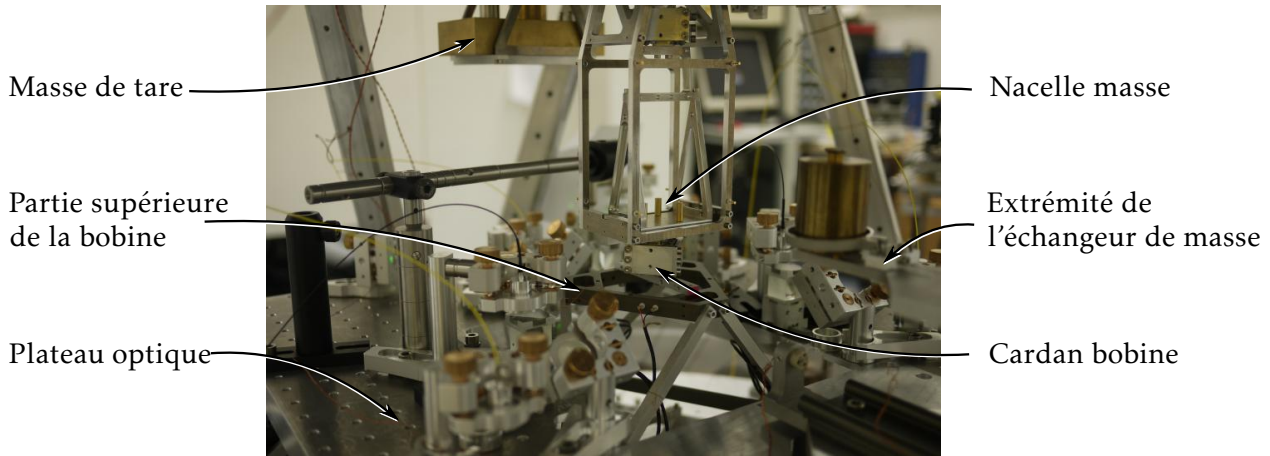


FIGURE 2.17 – Vue photographique du plateau supportant les interféromètres et les collimateurs des capteurs gaussiens. On distingue au centre, la partie supérieure de la bobine, le cardan bobine et la nacelle de masse. À droite on aperçoit la masse de test (sur cette photographie, il s’agissait d’une masse en laiton) et l’extrémité de l’échangeur de masse. À gauche se trouve la masse de tare (parallélépipède en laiton).

Les autres informations de vitesses et de positions permettront de déterminer des corrections à la détermination de la valeur de la constante de Planck : les chapitres 4 et 5 développeront ces notions.

Les interféromètres et les capteurs gaussiens de la bobine sont placés sur le même plateau optique (FIGURE 2.17), lui-même rigidement relié au circuit magnétique par des supports courts : les mesures des vitesses et des déplacements s’effectuent donc par rapport à ce plateau.

Un dernier capteur gaussien (pour un total de 5) est utilisé pour déclencher le démarrage des mesures en phase dynamique à partir d’un point précis de la trajectoire : chacun des profils de champ d’une même séquence peut donc être rapporté à ce point de référence.

### 2.2.3.2 Interféromètres

Les trois interféromètres déterminent la position de la bobine par rapport à la verticale (déplacements verticaux et rotation autour de l’axe vertical) et donc sa vitesse verticale.

**a. Description** Les interféromètres sont des interféromètres de Michelson hétérodynes éclairés par un laser Nd:YAG commercial (Innolight Prometheus) doublé en fréquence (20 mW de puissance à 532 nm) et stabilisé sur une raie de fluorescence. Si les faisceaux des interféromètres sont verticaux, le décalage Doppler  $\nu_D$  de l’onde réfléchie par le coin de cube mobile est :

$$\nu_D = 2 \cdot n_{\text{air}} \cdot \frac{v_z}{c} \cdot \nu_0, \quad (2.13)$$

où  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  est la célérité de la lumière dans le vide,  $v_z$  la vitesse de déplacement vertical,  $\nu_0$  la fréquence de l'onde lumineuse dans le référentiel de la source et  $n_{\text{air}}$  l'indice de réfraction du milieu de propagation.

La stabilisation s'effectue par l'intermédiaire d'une cellule à fenêtres inclinées contenant du di-iode sous forme gazeuse, refroidie à environ  $-5 \text{ }^\circ\text{C}$  (afin de peupler convenablement les niveaux hyperfins de l'état fondamental concerné par la transition optique). Le spectre hyperfin utilisé est celui de la raie R(56) 32-0, avec comme fréquence de référence la fréquence de la raie a15 ( $\nu_0 = 563\,260\,509,925 \text{ MHz}$ ).

La fréquence Doppler correspondant à la vitesse choisie de  $2 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  est alors de  $7\,515 \text{ Hz}$ .

La fréquence hétérodyne est imposée par la différence de fréquences entre deux modulateurs acousto-optiques (pilotés à  $80 \text{ MHz}$  et  $81,5 \text{ MHz}$  et utilisés en double passage). Les bras sont donc séparés en fréquence de  $3 \text{ MHz}$ . Ces deux faisceaux lasers sont préparés sur une table optique et conduits vers l'enceinte de l'expérience au moyen de fibres optiques.

Les faisceaux sont séparés au niveau du plateau optique pour alimenter chacun des trois interféromètres placés à l'intérieur de la chambre à vide. Pour éviter la diaphonie entre les bras de mesure et le bras de référence, les faisceaux se propagent séparément sur une longue distance (plusieurs dizaines de centimètres) et ne se superposent qu'à la sortie des interféromètres. Pour réduire autant que possible les effets de dilatation et de vibration du support, pour chaque interféromètre, chacun des deux bras utilise exactement les mêmes éléments optiques jusqu'à l'interféromètre proprement dit. Pour les mêmes raisons, la distance entre le coin de cube de référence et le coin de cube mobile est minimisée.

Le faisceau laser de sortie de chacun des interféromètres est collecté par une fibre optique multimode et est acheminé vers la table optique de la salle instrumentation.

En plus de la mesure de fréquence – et donc de vitesse et de position – proprement dite, les interféromètres ont également pour but d'asservir le bruit de phase introduit par les fibres.

**b. Asservissement bruit de phase** Le bruit de phase introduit par les fibres est compensé en ajustant la fréquence pilotant un des modulateurs acousto-optiques au moyen d'un oscillateur contrôlé en tension (VCO, *voltage controlled oscillator*): la fréquence du battement de référence est comparée à la fréquence de référence fournie par un synthétiseur ( $3 \text{ MHz}$ ). Cette comparaison de fréquences fournit un signal d'erreur qui est intégré et sert de commande pour le VCO.

**c. Mesure de phase** L'objectif est ici de disposer d'une intégration continue de la phase interférométrique pour déterminer les distances  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ , de

façon à disposer de la position de la bobine ( $z$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ ) à tout instant en phase statique et en phase dynamique.

On utilise un comparateur de phase, un système électronique qui a pour fonction de générer un signal de sortie proportionnel à la différence de phase entre deux signaux d'entrée. Les deux signaux d'entrée sont la fréquence d'hétérodynage de référence (3 MHz) ainsi que la fréquence de sortie de l'interféromètre (3 MHz décalé – ou non – de la fréquence Doppler).

Le signal de sortie est intégré par le FPGA avec une résolution temporelle de 1  $\mu$ s (ce qui correspond à une résolution de l'ordre du centième de frange) qui fournit la valeur de la phase intégrée depuis l'initialisation.

On a donc accès à chaque instant aux phases interférométriques correspondant aux trois coins de cube,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$ . Les positions verticales des 3 coins de cube (FIGURE 2.16) sont alors :

$$\begin{cases} z_1 = \varphi_1 \cdot \frac{c}{n_{\text{air}} \cdot \nu_0} \\ z_2 = \varphi_2 \cdot \frac{c}{n_{\text{air}} \cdot \nu_0} \\ z_3 = \varphi_3 \cdot \frac{c}{n_{\text{air}} \cdot \nu_0} \end{cases} \quad (2.14)$$

### 2.2.3.3 Capteurs gaussiens

Cinq capteurs gaussiens sont donc utilisés dans la balance du watt :

- Trois capteurs sont destinés à mesurer les distances  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  de la bobine (FIGURE 2.16), et donc *in fine* les mouvements de la bobine dans le plan horizontal ;
- Un capteur sert de référence pour la position verticale de la bobine (FIGURE 2.16) ;
- Un capteur mesure le déplacement de l'extrémité du fléau (FIGURE 2.7).

Ces capteurs<sup>6</sup> seront caractérisés au chapitre suivant.

Ils délivrent des signaux analogiques qui sont enregistrés et moyennés sur les période de mesure de tension, comme le décrit la section suivante.

### 2.2.4 Synchronisation des mesures de tension et de fréquence

La mesure de tension est réalisée par des voltmètres numériques commerciaux Agilent 3458A, synchronisés sur la fréquence du secteur. Leur temps d'intégration est ainsi défini par leur propre détermination de cette fréquence de manière à augmenter le taux de réjection des perturbations dues au secteur. Les voltmètres sont utilisés comme instruments-maîtres pour la synchronisation des mesures et délivrent un signal d'armement ou de déclenchement pour tous les autres instruments impliqués dans la mesure.

6. La FIGURE 2.15 donne une vue d'ensemble de l'implantation des capteurs optiques.

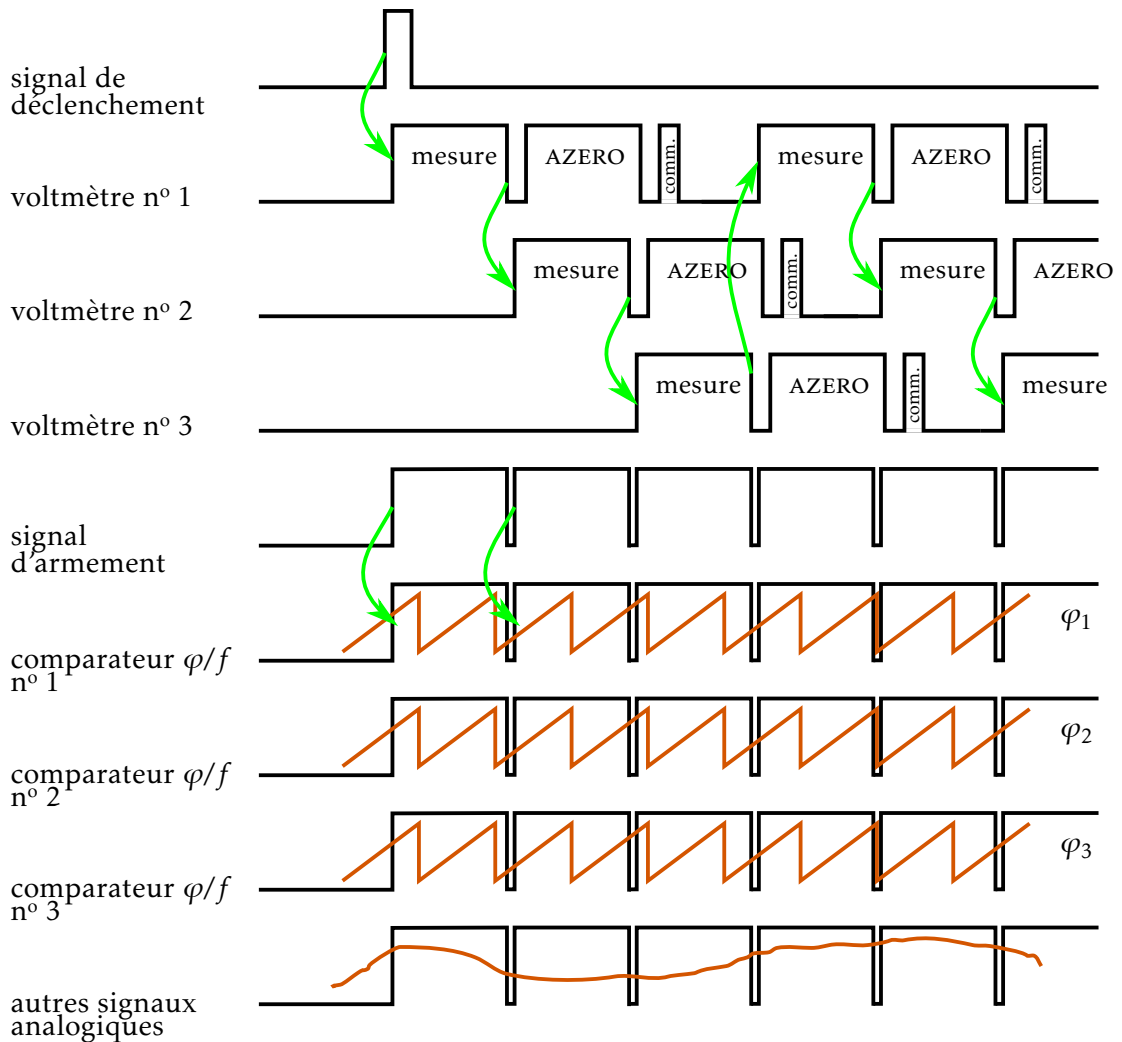


FIGURE 2.18 – Principe de déclenchement des mesures. Après le temps de mesure des voltmètres (« mesure »), une évaluation de leur tension de décalage interne est effectuée (« AZERO »), puis un temps est nécessaire pour les communications (« comm. »). Trois voltmètres sont donc nécessaires pour assurer une mesure quasi-continue de la tension. En phase dynamique, le passage de la bobine à une position repérée par le capteur gaussien vertical (FIGURE 2.16) génère l'émission d'un signal de déclenchement. En phase statique, ce signal est généré par la stabilisation de la position angulaire du fléau du comparateur de force, tel que repéré par un capteur gaussien (FIGURE 2.7). Le premier voltmètre effectue alors une mesure de tension, puis, à la fin de celle-ci, le second voltmètre prend le relais. Une électronique génère un signal dont les valeurs hautes correspondent aux périodes où les voltmètres effectuaient leurs mesures (« signal d'armement »). Ainsi, les 3 comparateurs phase-fréquence (« comparateurs  $\phi/f$  ») déterminent la position (et la vitesse) de la bobine correspondant à chacune des périodes de mesure. De la même façon, les signaux analogiques des capteurs de position sont moyennés sur les périodes de mesure des voltmètres.



Ils sont configurés en mode auto zéro (« AZERO ») pour rejeter les tensions de décalages internes : en plus du temps utilisé pour stocker les données dans la mémoire interne du voltmètre (quelques microsecondes), un autre temps mort de même durée que la mesure de tension est introduit.

Tous ces temps morts pourraient éventuellement être acceptés en phase statique, mais en phase dynamique, ils correspondent à des lacunes dans le profil de champ. Pour assurer une mesure quasiment continue, il est nécessaire d'utiliser trois voltmètres déclenchés successivement.

Trois voltmètres sont donc utilisés, FIGURE 2.18, le second se substituant au premier dès qu'il a terminé sa mesure, puis le troisième au second. Le premier voltmètre est à nouveau sollicité immédiatement après que le troisième a fini sa mesure. Le déroulement de cette séquence est contrôlé par une électronique dont les signaux de sorties déclenchent de plus les autres mesures de manière synchrone aux mesures de tension. Ainsi, à chaque portion de la trajectoire, correspondant à une mesure de tension induite aux bornes de la bobine, est associée une mesure de la fréquence Doppler et donc de la vitesse de la bobine.

Une électronique dédiée a été développée pour répondre à ce besoin. Son principe est de détecter le signal de fin de mesure d'un voltmètre puis de déclencher le voltmètre suivant. Ainsi, le signal d'arrêt de mesure du voltmètre 1 déclenche le voltmètre 2, dont le signal d'arrêt déclenche le voltmètre 3, dont le signal d'arrêt déclenche le voltmètre 1.

Le délai de quelques nanosecondes introduit par l'électronique de déclenchement est négligeable rapporté au délai interne des voltmètres estimé à moins de 300 ns.

En phase dynamique, l'ensemble des mesures est déclenché par un signal, généré par le passage de la bobine à un point d'altitude fixe (à l'aide d'un capteur gaussien). Les mesures s'interrompent lorsqu'un signal d'inhibition est envoyé à l'électronique de synchronisation. Ce signal est envoyé en fin de trajectoire par le même capteur gaussien.

En phase statique, le signal de déclenchement est généré lorsque le bruit d'asservissement de courant du fléau est passé sous un certain seuil. Le signal d'inhibition est envoyé après une durée choisie.

Un signal d'armement, dont les valeurs hautes correspondent aux périodes où les voltmètres effectuaient leurs mesures, est ensuite utilisé par les trois comparateurs phase-fréquence (détermination des phases interférométriques), mais également par une carte d'acquisition (qui détermine sur ces signaux d'armement d'autres grandeurs analogiques nécessaires à la détermination de constante de Planck et en particulier les valeurs des tensions fournies par les trois capteurs gaussiens périmétriques à la bobine).

## 2.3 Conclusion

TABLE 2.1 – Principales caractéristiques de la balance du watt.

Masse étalon $m$	500 g
Induction magnétique $B$	1 T
Diamètre de la bobine	266 mm
Nombre de tours	688
Longueur de fil $\ell$	580 m
Courant de pesée $I$	5 mA
Puissance dissipée	5 mW
Résistance $R$	200 $\Omega$
Tension $U, V$	1 V
Vitesse $v_z$	2 mm · s <sup>-1</sup>
Course verticale	40 mm

Dans ce chapitre, nous avons décrit les principaux éléments du dispositif expérimental et de l'instrumentation de la balance du watt. Nous le concluons en rappelant les principales particularités (TABLE 2.1) de l'expérience, qui repose sur :

- La conception et la réalisation d'un comparateur de forces à fléau de 10 cm de longueur de bras. Ce fléau est muni de lames flexibles et d'un double cardan suspendu à l'une de ses extrémité de façon à confondre les points d'application des forces électromagnétiques et gravitationnelles [164];
- La conception et la réalisation de la suspension du comparateur de forces à deux segments permettant de déterminer les forces horizontales et les moments qui s'exercent sur la bobine [161];
- L'utilisation d'un matériau de très faible susceptibilité magnétique (iridium) pour la réalisation d'une masse de transfert<sup>7</sup> [181];
- La conception et la réalisation d'un circuit magnétique dont les aimants permanents en samarium-cobalt génèrent une induction magnétique de 1 T dans l'entrefer [172];
- La conception et la réalisation d'un dispositif de guidage de translation verticale à lames flexibles pour une course 40 mm [187] de par le choix, pour la phase dynamique, de déplacer verticalement à une vitesse de 2 mm · s<sup>-1</sup> l'ensemble bobine et comparateur de forces (soit une masse d'environ 15 kg);

7. Les masses de transfert en iridium ne sont pas encore disponibles, section 2.1.7.2.

- La conception et la réalisation d'un dispositif pour mesurer la position et la vitesse de la bobine, fondé sur un interféromètre de Michelson hétérodyne [186];
- La conception et la réalisation d'un gravimètre absolu à atomes froids de rubidium [175].

L'exactitude des déterminations de la valeur de la constante de Planck est alors fonction de nombreux facteurs dont la nature est soit intrinsèque aux différents sous-ensemble qui la composent<sup>8</sup>, soit liée à l'assemblage correct de ces sous-ensembles<sup>9</sup> pour constituer la balance du watt proprement dite.

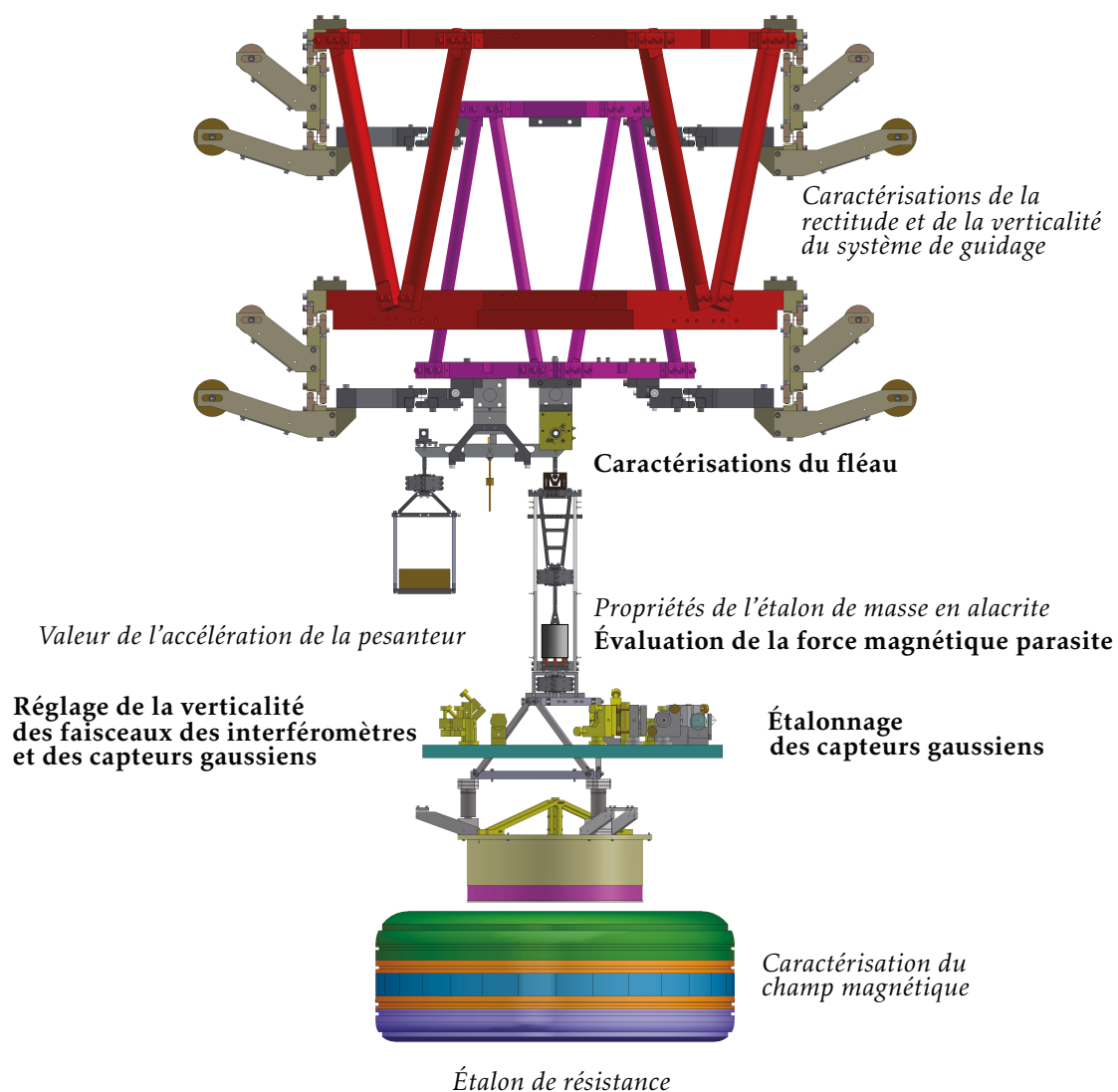
Une étude de l'interaction entre certains de ces sous-ensembles sera développée dans les chapitres 3 et 4.

---

8. Masse étalon, gravimètre, comparateur de forces, dispositif de mesure des grandeurs électriques et de la vitesse verticale de la bobine, système de translation verticale de la bobine, échangeur de masse...

9. Positionnement correct de la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique et forces et moments parasites associés, influence des forces parasites horizontales sur le comparateur de forces, interaction du champ magnétique de fuite avec le matériau de la masse étalon...





Dans ce chapitre sont développées quatre caractérisations\* qui sont nécessaires à l'évaluation de l'incertitude-type sur la détermination de la valeur de la constante de Planck décrite au chapitre 5. La première section donne l'évaluation de la **force magnétique parasite** qui s'exerce sur la masse étalon en alacrite (section 3.1). Puis, la procédure mise au point pour **aligner sur la verticale les faisceaux des interféromètres et des capteurs gaussiens** est décrite (section 3.2). Ensuite, des **caractérisations du fléau** du comparateur de forces sont effectuées, et notamment celles portant sur l'évaluation de l'angle séparant ses pivots de la verticale (section 3.3). Enfin, la procédure ayant permis d'**étalonner les capteurs gaussiens**, qui déterminent la position de la bobine dans le plan horizontal, est donnée (section 3.4).

\*. Ces quatre caractérisations sont ajoutées en gras sur la figure de manière à les distinguer des éléments déjà présents.

---

## Chapitre 3

# Caractérisations préliminaires à la détermination des termes d'erreurs

---

Dans ce chapitre sont présentées quatre caractérisations qui sont des préambules nécessaires à la détermination des incertitudes-types relatives liées aux erreurs de puissance  $u_r(P)$ , de vitesse  $u_r(v_z)$ , de masse  $u_r(m)$  et de comparaison de forces  $u_r(f)$ .

La première caractérisation a trait à l'interaction du champ magnétique de fuite du circuit magnétique avec l'étalon de masse  $m$  : une force verticale parasite  $F_\chi$  est générée, du fait de la susceptibilité volumique magnétique non nulle du matériau de la masse étalon.

La deuxième section décrit la procédure mise au point pour aligner les faisceaux des interféromètres sur la verticale, ainsi que l'incertitude associée.

Ensuite, la troisième caractérisation porte sur le fléau du comparateur de forces. L'objectif est de déterminer la différence d'altitude entre les axes de rotation du pivot central et des pivots latéraux. Cette grandeur est essentielle pour évaluer l'influence des forces horizontales sur la comparaison de forces (la pesée) en phase statique. La méthode proposée repose sur l'étude expérimentale de la sensibilité du fléau en fonction de la position de son centre de gravité.

Enfin, la dernière caractérisation concerne les capteurs de position de la balance du watt. Que ce soit pour assurer l'asservissement du fléau, pour contrôler le déclenchement des mesures en phase dynamique ou pour repérer les mouvements de la bobine dans le plan horizontal, il est nécessaire de disposer de capteurs de position amagnétiques, compatibles vide et ayant une résolution meilleure que le micromètre. Pour répondre à tous ces critères, le choix s'est porté sur des capteurs optiques utilisant deux faisceaux gaussiens. Après une brève description des capteurs initialement prévus et une mise en évidence expérimentale de leurs limitations, nous proposons quelques

modifications, notamment dans le nombre et le conditionnement des faisceaux gaussiens à considérer.

### 3.1 Force parasite magnétique

L'imperfection du confinement du champ magnétique dans l'entrefer du circuit magnétique (valeur nominale 1 T, section 2.1.5.2 page 51) induit un champ au point où se situe la masse étalon (environ 35 cm au dessus du circuit magnétique, dans son axe de révolution). Compte-tenu de la symétrie de révolution du circuit magnétique, l'induction magnétique  $\vec{B}$  est verticale sur cet axe.

Ce « champ de fuite », attendu que la susceptibilité magnétique volumique de la masse étalon utilisée est non nulle (Alacrite XSH, section 2.1.7.2 page 55), est à l'origine d'une force magnétique parasite verticale  $F_\chi$  qui vient s'ajouter au poids de l'étalon. La balance interprète cette interaction comme une variation de masse égale à  $C_\chi = -\frac{F_\chi}{g}$ .

#### 3.1.1 Détermination

La valeur de cette force  $F_\chi$  due à l'interaction d'un champ magnétique selon l'axe vertical  $z$  [188, 189] s'exprime par :

$$F_\chi = F_\chi(\chi) + F_\chi(M) = -(\chi - \chi_0) \cdot \mu_0 \cdot \int_V H \cdot \frac{\partial H}{\partial z} dV - \mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_V M \cdot H dV, \quad (3.1)$$

où  $\chi$  est la susceptibilité magnétique du matériau considéré,  $\chi_0$  celle de l'air ou du vide,  $V$  le volume la masse,  $M$  son aimantation par unité de volume et  $H$  son excitation magnétique.

En admettant que l'alacrite ne possède pas d'aimantation  $M$ , seule sa susceptibilité magnétique  $\chi$  interagit avec l'excitation magnétique  $H$ .

Considérant  $H = \frac{B}{\mu_0} - M$ , l'expression ci-dessus se réduit alors à :

$$F_\chi = F_\chi(\chi) = -(\chi - \chi_0) \cdot \mu_0 \cdot \int_V H \cdot \frac{\partial H}{\partial z} dV = -(\chi - \chi_0) \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \int_V B \cdot \frac{\partial B}{\partial z} dV \quad (3.2)$$

On obtient une expression simplifiée de la force magnétique en considérant que le champ magnétique est parallèle à l'axe vertical de la masse étalon (un cylindre droit). Ce cylindre a une surface de base  $S$ . On en déduit :

$$F_\chi = -\chi \cdot \frac{S}{\mu_0} \cdot \int_z B \cdot \frac{\partial B}{\partial z} dz. \quad (3.3)$$

L'induction magnétique a été mesurée le long de l'axe  $z$  avec une sonde à effet Hall depuis une position située à 9 cm de la surface du circuit magnétique jusqu'à 46,1 cm au-dessus de celle-ci. Les résultats sont présentés à la FIGURE 3.1.

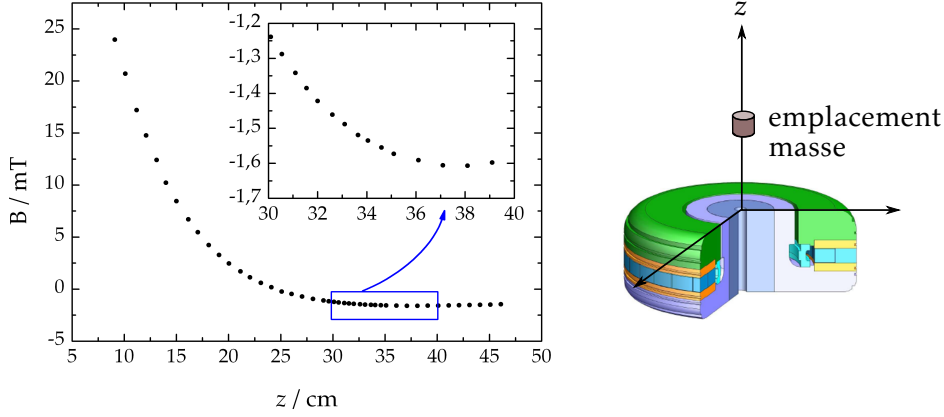


FIGURE 3.1 – Mesures de l'intensité du champ magnétique dans l'axe de révolution du circuit magnétique, d'une altitude de 9 cm au-dessus de sa face supérieure, jusqu'à une altitude de 46,1 cm. Le cartouche présente l'agrandissement de la zone où se trouve la masse étalon.

Dans le cartouche de cette figure, on a représenté les mesures expérimentales d'induction magnétique, avec  $B$  exprimé en milliteslas et  $z$  en centimètres. Ces données permettent de déterminer point par point la valeur du produit  $B \cdot \frac{\partial B(z)}{\partial z}$ .

Ce produit est assimilable à la droite d'équation suivante entre les altitudes 30 cm et 40 cm :

$$B \cdot \frac{\partial B(z)}{\partial z} = +0,709(39) - 0,019(11) \cdot z, \quad (3.4)$$

où les nombres entre parenthèses représentent l'incertitude-type sur les deux chiffres précédents.

Cette équation permet de déterminer la valeur de l'intégrale  $\int_{z=32 \text{ cm}}^{z=36 \text{ cm}} B \cdot \frac{\partial B}{\partial z} dz$ , où 32 cm et 36 cm correspondent aux altitudes des faces inférieure et supérieure de l'étalon.

Comme la susceptibilité magnétique volumique de l'Alacrite vaut  $1,34 \times 10^{-3}$ , et que le diamètre et la hauteur de la masse étalon valent 4,11 cm, on peut alors évaluer l'équation 3.3 à :

$$F_\chi = -3,6 \times 10^{-7} \text{ N}, \quad (3.5)$$

ce qui correspond à une augmentation de la valeur la masse étalon de  $C_\chi = -\frac{F_\chi}{g} = 37 \text{ } \mu\text{g}$ .



### 3.1.2 Incertitudes

Dans l'équation 3.3, le terme  $\mu_0$  a une valeur exacte.

La valeur de la susceptibilité magnétique est connue avec une incertitude-type relative de 10 % [181].

La surface  $S$  de la base de la masse étalon est calculée à partir de son volume. Celui-ci est connu à partir de la masse et de la densité de l'étalon en Alacrite. Elle est connue avec une incertitude-type relative de  $1,5 \times 10^{-5}$  (l'incertitude relative sur la masse est négligeable en comparaison). En supposant que le volume de l'étalon est égal à sa hauteur, cela correspond à une incertitude-type relative de  $1,5 \times 10^{-5}$  sur la surface  $S$ . Toutefois, le processus d'ajustage de la masse  $m$  de l'étalon (polissage d'une des deux faces planes) conduit à une différence entre la hauteur et le diamètre de la masse estimée à 0,5 mm au maximum. En raisonnant à volume et à diamètre constants, cela signifie que la surface  $S$  de la masse varie de  $\pm 0,22 \text{ cm}^2$ , soit une incertitude-type relative sur la valeur de  $S$  de 1 %.

D'après les données du constructeur, l'incertitude-type relative sur la détermination de  $B$  est de 0,25 %.

TABLE 3.1 – Composantes d'incertitude de l'évaluation de la force magnétique parasite  $F_\chi$ .

Composante d'incertitude	Valeur type relative
Susceptibilité magnétique $\chi$	10 %
Surface $S$	1 %
Mesure de $B$	0,25 %
Intégrale $\int_{z=32 \text{ cm}}^{z=36 \text{ cm}} B \cdot \frac{\partial B}{\partial z} dz$	6 %
Positionnement vertical de la masse étalon	6 %
Incetitude-type combinée relative	15 %

La valeur de l'intégrale  $\int_{z=32 \text{ cm}}^{z=36 \text{ cm}} B \cdot \frac{\partial B}{\partial z} dz$  a été calculée en utilisant l'ajustement linéaire 3.4. Les valeurs des incertitudes des coefficients de cet ajustement peuvent être utilisées pour déterminer l'incertitude de type A attachée à l'évaluation de l'intégrale précédente. On obtient alors une incertitude-type relative de 6 %. Cette incertitude prend en compte les erreurs de positionnement (en  $z$  et dans le plan horizontal) et de direction de la sonde étalon (angle par rapport à la verticale).

Finalement, nous avons considéré que la détermination de  $B(z)$  s'effectuait sans erreur pour la détermination de  $z$ , et que la masse étalon était placée exactement entre les deux altitudes 32 cm et 36 cm. L'incertitude sur le positionnement de la sonde de champ magnétique est déjà prise en compte dans l'évaluation de l'intégrale  $\int B \cdot \frac{\partial B}{\partial z} dz$ , par l'intermédiaire de l'incertitude sur les coefficients de l'ajustement. L'évaluation de l'erreur due au positionnement

vertical de la masse étalon peut s'estimer en faisant varier les deux bornes de l'intégrale : en se fixant une erreur de positionnement maximale de 2 mm, cela entraîne une incertitude-type relative de 6 %.

Finalement, la somme quadratique des ces différentes incertitudes (TABLE 3.1) nous permet d'associer à l'évaluation de la force  $F_\chi$  une incertitude-type relative de 15 %.

### 3.1.3 Conclusion

Il sera donc nécessaire d'effectuer une correction de la valeur de la masse de  $7,4 \times 10^{-8}$  en valeur relative. Cette correction est estimée connue à quinze pour cent près : la masse sera donc corrigée de l'interaction avec le champ de fuite du circuit magnétique avec une incertitude-type relative de  $1,1 \times 10^{-8}$ .

## 3.2 Verticalité des faisceaux des interféromètres

Les trois interféromètres (l'emplacement des interféromètres est visible à la FIGURE 2.15 page 57 ; consulter également la section 2.2.3.2 page 60) mesurent les composantes de vitesse de la bobine le long des axes définis par les faisceaux lasers des bras mobiles (la vitesse verticale  $v_z$  de la bobine étant obtenue en effectuant la dérivée de la moyenne des 3 positions mesurées).

Si les axes optiques des faisceaux lasers sont inclinés d'un angle  $\alpha$  sur l'horizontale, alors la mesure de  $v_z$  est effectuée avec une erreur relative de  $\frac{\alpha^2}{2}$  (erreur en cosinus).

La méthode choisie consiste à utiliser une lame semi-réfléchissante et un rétro réflecteur pour comparer l'angle du faisceau laser dont on veut déterminer l'inclinaison à l'angle du faisceau laser réfléchi sur un miroir horizontal (représenté à la FIGURE 3.2, dans le cas où le miroir n'est pas parfaitement horizontal). On néglige les défauts de parallélisme du coin de cube et de la lame semi-réfléchissante.

Il était prévu d'utiliser un récipient rempli de mercure comme miroir horizontal. Dans notre cas, les expériences ont montré que la planéité de la surface du mercure dont le récipient est posé sur la structure de la balance était très sensible aux perturbations extérieures. En pratique, le rayon laser réfléchi par le ménisque de mercure présentait un bruit angulaire supérieur au milliradian.

Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé un miroir flottant placé dans la piscine de mercure (FIGURE 3.4, gauche). Dans ces conditions, le bruit angulaire de réflexion du faisceau est significativement réduit : il vaut alors environ  $\pm 10 \mu\text{rad}$ .

En revanche, du fait de la non-homogénéité du matériau constituant le miroir, ou encore des bulles d'air qui peuvent se trouver sur la face inférieure du miroir flottant, celui-ci n'est pas horizontal, mais incliné d'un angle  $\beta$ . Cet angle peut être déterminé en faisant tourner le récipient empli de mercure

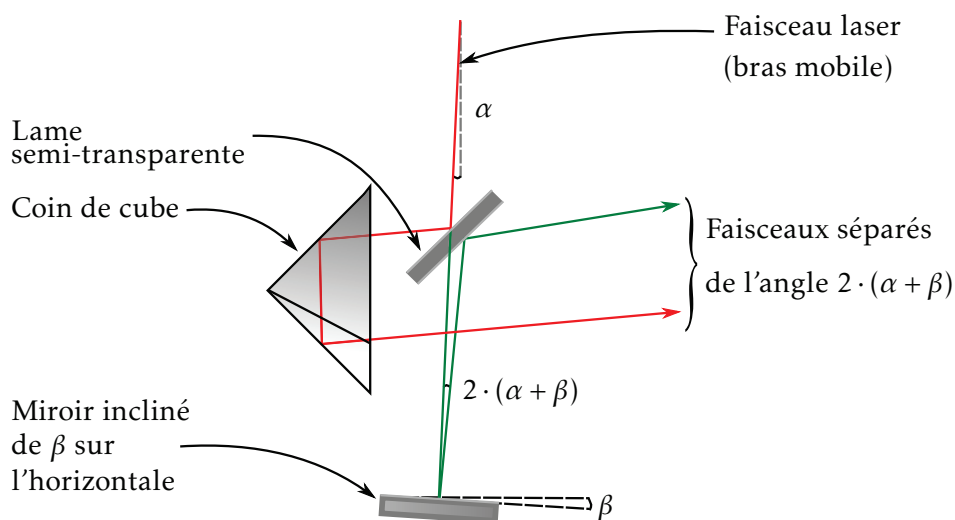


FIGURE 3.2 – Principe de la détermination de l'écart à la verticale d'un faisceau laser. Le faisceau laser dont on souhaite mesurer l'écart à la verticalité  $\alpha$  est séparé en deux : un faisceau réfléchi sur une lame semi-réfléchissante, et un faisceau transmis par la lame et réfléchi sur un miroir (incliné de  $\beta$  inconnu sur l'horizontale). Les deux faisceaux émergents sont alors séparés angulairement de  $2 \cdot (\alpha + \beta)$ .

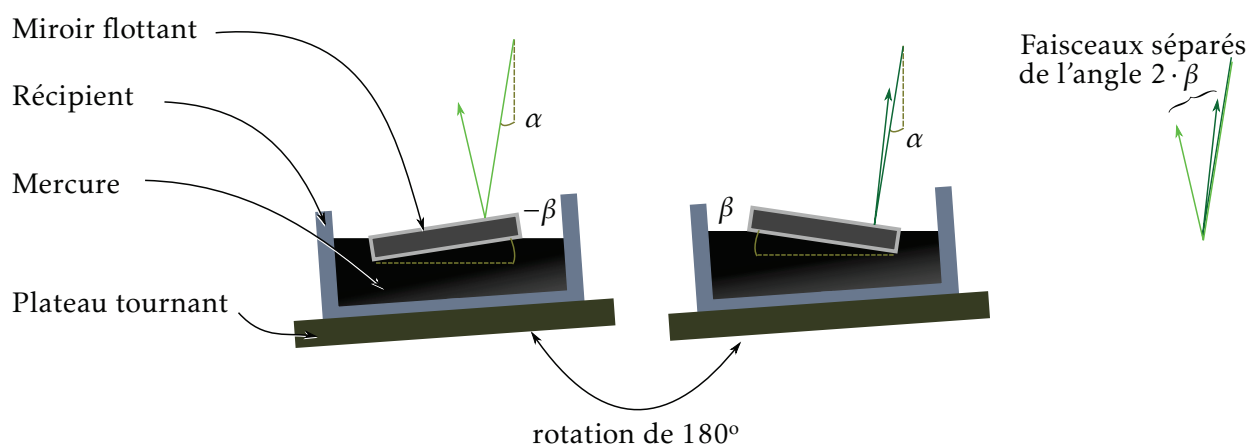


FIGURE 3.3 – La détermination de l'angle d'inclinaison  $\beta$  inconnu du miroir flottant peut s'effectuer par retournement de la piscine de mercure qui le contient. La référence d'horizontalité est donnée par le plan du mercure : l'axe de rotation du miroir flottant est donc confondu avec la verticale, et cela quelque soit l'axe de rotation du plateau tournant.

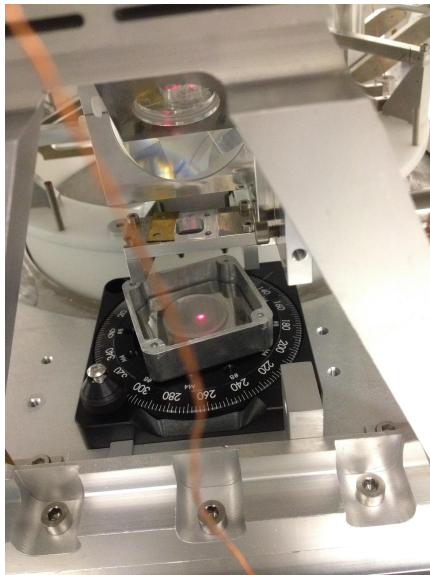


FIGURE 3.4 – *Figure gauche* : Miroir flottant dans une piscine de mercure. La piscine de mercure est placée sur une monture tournante. *Figure droite* : Lunette astronomique utilisée pour déterminer la déviation angulaire de deux faisceaux, de résolution  $3\ \mu\text{rad}$ .

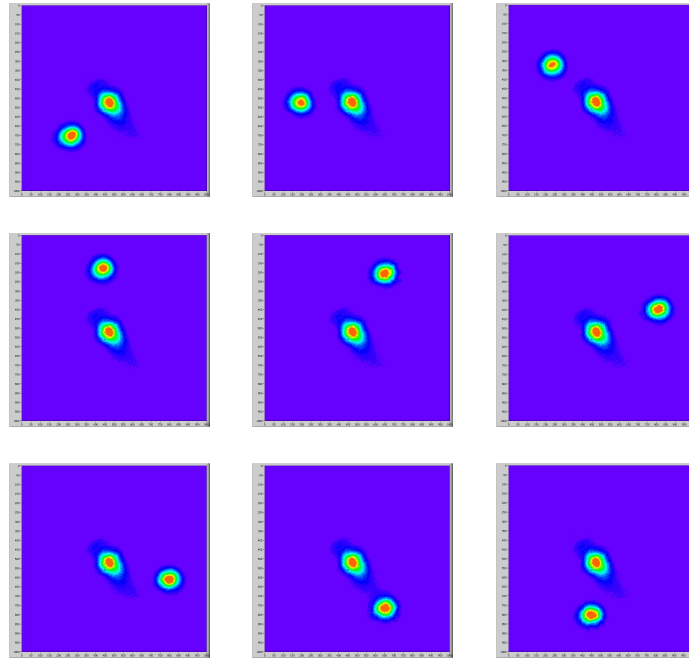
de  $180^\circ$  (FIGURE 3.3). L'angle  $\beta$  est la moitié de la déviation observée des faisceaux réfléchis ; l'angle  $\alpha$  peut alors être déterminé.

La mesure de la déviation angulaire s'effectue au moyen d'une lunette astronomique équipée d'un capteur CCD (FIGURE 3.4, droite). Cet instrument permet de déterminer la déviation angulaire de deux faisceaux lasers avec une résolution de  $3\ \mu\text{rad}$  (1 pixel) [190].

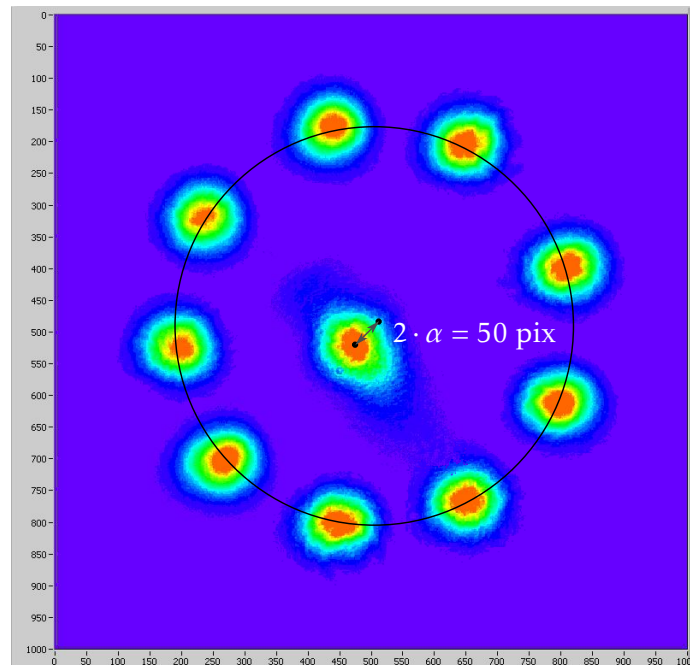
Le capteur CCD de la lunette étant bi-dimensionnel, nous avons déterminé la déviation  $\alpha$  d'un faisceau sur l'horizontale en tournant le récipient de mercure par pas de  $30^\circ$  (FIGURE 3.5–a). Des considérations géométriques font que l'écart à la verticalité  $\alpha$  du faisceau laser sur l'horizontale est égal à la moitié de l'écart angulaire entre le faisceau de référence et le centre du cercle inscrit aux faisceaux réfléchis (FIGURE 3.5–b).

Ainsi après les réglages nécessaires, l'écart à la verticalité des 3 faisceaux des interféromètres et des 3 faisceaux des capteurs gaussiens a été réduit à une valeur inférieure à  $100\ \mu\text{rad}$ . Ceci correspond à une incertitude-type relative sur la détermination de la vitesse de  $5 \times 10^{-9}$ .

Cette méthode n'a toutefois été opérationnelle qu'après les mesures de la valeur de la constante de Planck décrites au chapitre 5. La verticalité des faisceaux des interféromètres a été mesurée *a posteriori*, pour un écart à la verticale inférieure à  $\pm 350\ \mu\text{rad}$ . Si on considère une distribution rectangulaire, ceci correspond à une incertitude-type relative sur la détermination de la vitesse de  $6 \times 10^{-8}$ .



(a) Succession de 9 mesures d'écart angulaire entre le faisceau de référence (au centre de chacune des images) et le faisceau réfléchi sur le miroir flottant. Toutes les images ont une dimension de 1000 pixels par 1000 pixels, soit 3 mrad par 3 mrad. Pour chacune de ces mesures, la piscine de mercure a été tournée d'environ  $40^\circ$  par rapport à la précédente configuration.



(b) Combinaison des images précédentes (dimension 1000 pixels par 1000 pixels). La distance entre le faisceau de référence et le centre du cercle inscrit aux faisceaux réfléchis sur le miroir flottant correspond à deux fois la déviation angulaire du faisceau laser sur la verticale. Ici, on mesure  $2 \cdot \alpha = 50$  pix, soit une déviation du faisceau laser sur la verticale de  $75 \mu\text{rad}$ .

FIGURE 3.5 – Illustration du processus permettant de mesurer l'angle d'un faisceau laser sur la verticale par rotation autour de la verticale d'un miroir incliné sur l'horizontale.

### 3.3 Fléau du comparateur de forces : estimation de la différence d'altitude des pivots

Un comparateur de forces à fléau (bras identiques, de longueur  $L_1=L_2=L$  dans les lignes suivantes) compare les moments (réduits par rapport à son axe de rotation) des forces s'exerçant à ses extrémités. Le processus de double pesée compare le moment du poids de la masse étalon  $m$  au moment des forces de Laplace qui s'exercent à l'une de ses extrémités (consulter à ce sujet la section 2.1.4.3 page 46 et en particulier l'équation 2.5 page 49).

Lorsque le point d'application des forces à l'extrémité du fléau (pivot 2,  $P_2$ ) et l'axe de rotation du fléau (horizontal et passant par le pivot central,  $P_0$ ) sont dans le même plan horizontal (FIGURE 3.6(a)) le fléau n'est sensible qu'à la force  $F_z$ . On a donc  $m \cdot g \cdot L = F_z \cdot L$ , la comparaison entre  $m \cdot g$  et  $F_z$  s'effectue donc sans biais, ce qui est l'objectif recherché.

Les pivots peuvent toutefois être séparés d'une distance  $p$  verticale lorsque le fléau est horizontal (FIGURE 3.6(b)) : le fléau est alors sensible aux forces horizontales  $F_x$ . L'équilibre du fléau correspond à l'égalité  $m \cdot g \cdot L = F_z \cdot L + F_x \cdot p$ .

Dans le cas général, le fléau est également incliné d'un angle  $\psi$  sur l'horizontale (FIGURE 3.6(c)), qui conduit à l'égalité  $m \cdot g \cdot L = F_z \cdot L + F_x \cdot (p + L \cdot \psi)$ .

L'équation de la balance du watt établie au chapitre 1 supposait validée l'égalité  $m \cdot g = F_z$ . Toutefois, le fléau étant sensible au moment  $M_{/P_0} = F_x \cdot (p + L \cdot \psi) + F_z \cdot L$ , il faut écrire :

$$\frac{m \cdot g}{F_z} = 1 + \frac{F_x \cdot (p + L \cdot \psi)}{F_z \cdot L} = 1 + \frac{F_x}{F_z} \cdot \left( \psi + \frac{p}{L} \right), \quad (3.6)$$

$$\frac{m \cdot g}{F_z} = 1 + \frac{F_x}{F_z} \cdot \alpha, \quad (3.7)$$

où le terme  $\frac{F_x}{F_z} \cdot \alpha$  ( $\alpha$  est l'angle entre la droite joignant les pivots et l'horizontale) est une perturbation dans la comparaison du poids de la masse étalon à la composante verticale de la force de Laplace. Cette perturbation est due à la sensibilité du fléau aux forces axiales.

L'objet de cette section est par conséquent :

- D'assurer à l'angle du fléau sur l'horizontale  $\psi$  une valeur faible et connue ;
- De déterminer la distance  $p$  selon  $z$  entre l'axe de rotation du fléau et le point d'application des forces à son extrémité, lorsque le fléau est horizontal ;

et enfin de combiner ces deux résultats pour déterminer l'angle des pivots sur l'horizontale  $\alpha = \psi + \frac{p}{L}$ .

L'incertitude-type correspondante pour la détermination de la valeur de la constante de Planck pourra ensuite être calculée lorsque la valeur des forces relatives longitudinales  $\frac{F_x}{F_z}$  sera connue (voir les chapitre 4 et 5).

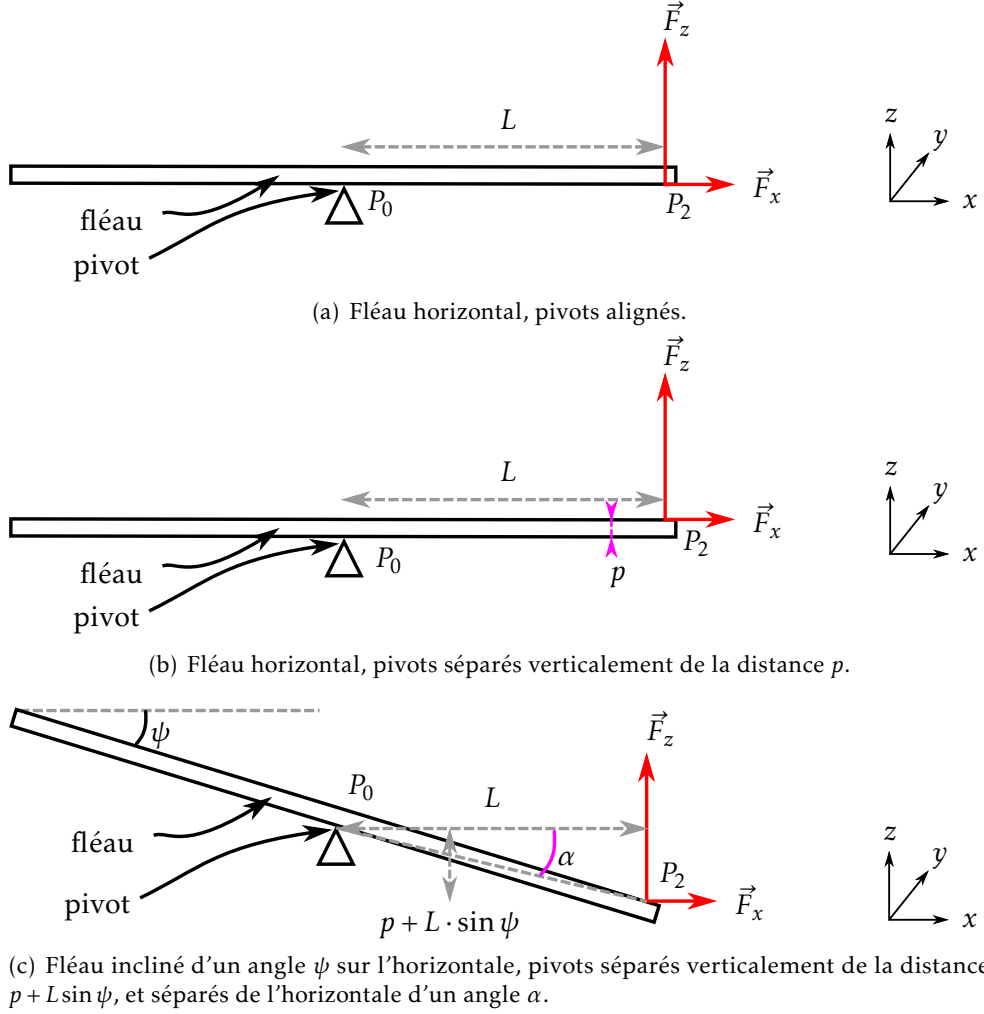


FIGURE 3.6 – Influence des forces horizontales  $F_x$  parallèles à l'axe longitudinal du fléau sur la comparaison de forces. Le fléau du comparateur de forces est sensible aux moments (réduits à son pivot central) des forces s'exerçant à son extrémité. Si le fléau est incliné d'un angle  $\psi$  très petit devant 1, si  $L$  est la longueur du bras du fléau et  $p$  la distance selon  $z$  séparant les pivots  $P_0$  et  $P_2$  – lorsque le fléau est horizontal –, alors le moment mesuré par le fléau est  $M_{/P_0} = F_x \cdot (p + L \cdot \psi) + F_z \cdot L$ , dans l'approximation des petits angles. Les pivots sont alors séparés de l'angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.

### 3.3.1 Détermination de l'inclinaison du fléau sur l'horizontale

Nous avons réalisé un berceau constitué de deux anses et d'un plateau de référence pour accueillir des capteurs capacitifs (FIGURE 3.7 et FIGURE 3.8).

Trois capteurs, placés sur le plateau de référence, visent la surface inférieure du fléau et deux capteurs, placés sur l'une des anses, visent une des surfaces latérales du fléau.

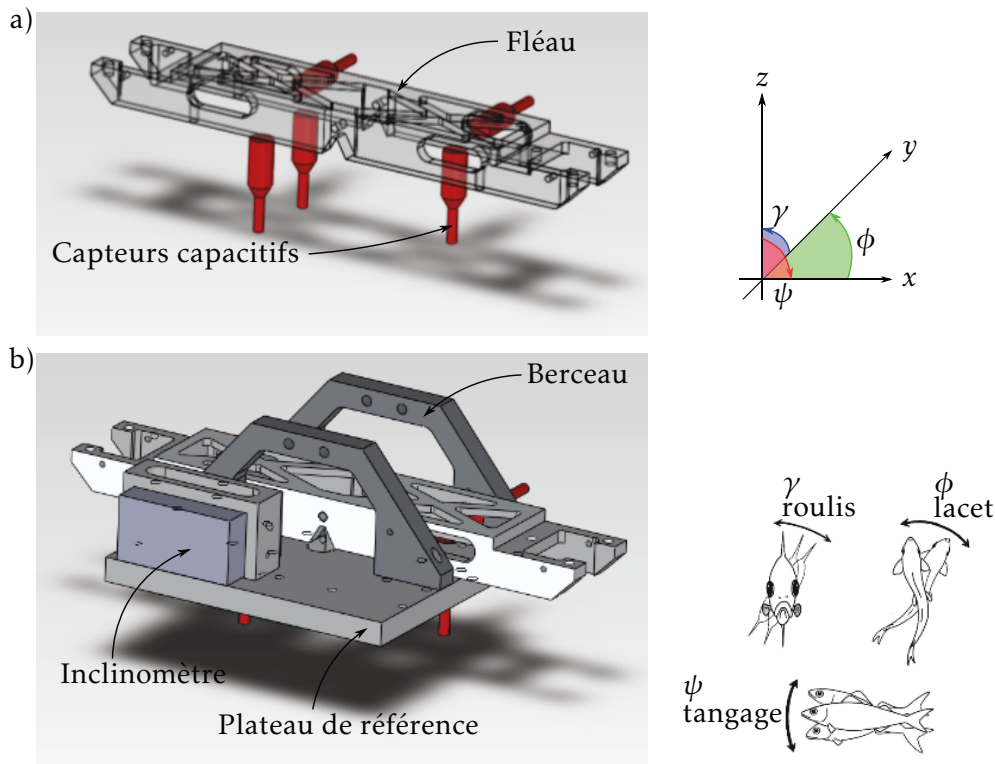


FIGURE 3.7 – Dispositif de mesure permettant d'obtenir les mouvements de tangage ( $\psi$ ), de roulis ( $\gamma$ ) et de lacet ( $\phi$ ) du fléau. Après réglage de l'angle sur l'horizontale du plateau de référence et étalonnage de la réponse des capteurs capacitifs, l'angle  $\psi$  correspond également à l'inclinaison du corps du fléau sur l'horizontale.

Ainsi, on peut mesurer les mouvements de tangage, de roulis et de lacet du fléau. Le tangage ( $\psi$ ) est défini comme la rotation autour de l'axe  $y$ , horizontal et perpendiculaire au fléau ; le roulis ( $\gamma$ ) comme la rotation autour de l'axe  $x$ , horizontal et parallèle au fléau et enfin le mouvement de lacet ( $\phi$ ) comme la rotation autour de l'axe  $z$  vertical.

La réponse des capteurs gaussiens peut être étalonnée sur un second plateau plan se plaçant au contact du plateau de référence et donc parallèle à celui-ci : de cette manière, il est possible de mesurer l'angle absolu du fléau par rapport au plan du plateau de référence.



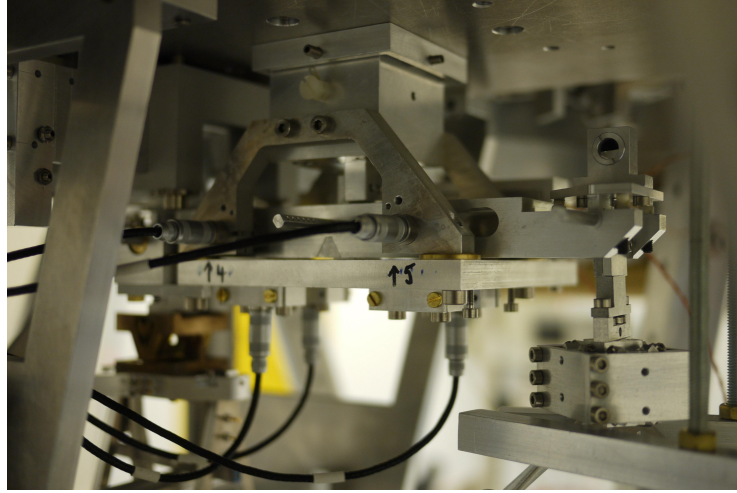


FIGURE 3.8 – Vue photographique du berceau du fléau. Au premier plan à droite est visible le cardan à lames flexibles pincées de la suspension de tare, et on aperçoit au fond à gauche le double cardan.

De plus, le plateau de référence est équipé d'un inclinomètre commercial qui permet de déterminer son inclinaison sur l'horizontale à mieux que  $100 \mu\text{rad}$ .

L'angle sur l'horizontale du plateau de référence étant connu, et la mesure des capteurs capacitifs donnant l'angle du fléau par rapport à ce plan, il s'agit donc d'assurer, en déplaçant le capteur gaussien d'asservissement du fléau, que l'inclinaison du fléau sur l'horizontale  $\psi$  soit proche de zéro lors des pesées.

De cette manière, l'angle du fléau a été ajusté sur l'horizontale avec une incertitude-type estimée à  $100 \mu\text{rad}$  :

$$\psi = (0 \pm 100) \mu\text{rad}. \quad (3.8)$$

### 3.3.2 Estimation de la différence d'altitude des pivots du fléau du comparateur de forces

Il a été choisi d'entreprendre la réalisation d'un fléau à pivots à lames flexibles (par opposition à un ensemble de couteaux et de coussinets) pour deux raisons principales : (1) adaptation du fléau à la charge suspendue et optimisation de sa sensibilité par le choix des propriétés géométriques et physiques des lames ; et (2) absence d'hystérésis due à des ensembles plan-couteau. Ces avantages ont été étudiés depuis de nombreuses années [169, 191, 192].

Les caractéristiques du fléau représenté à la FIGURE 3.9 sont :

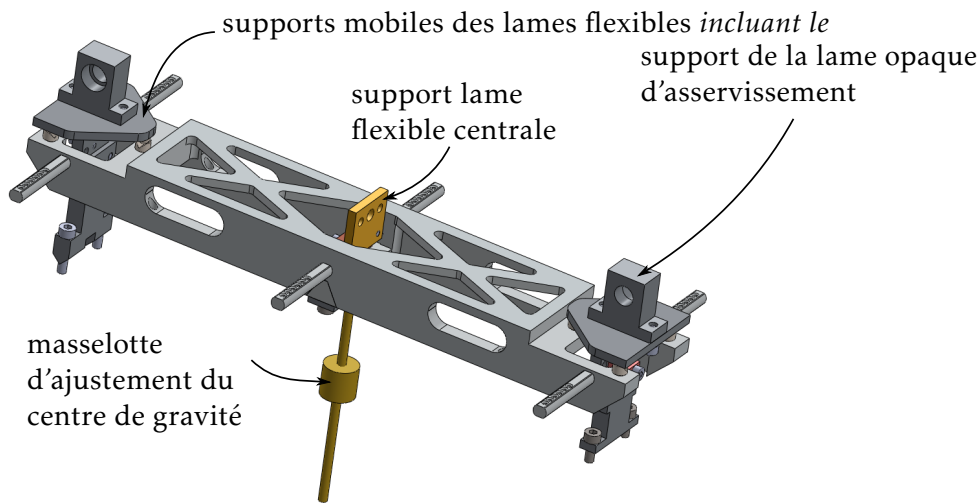


FIGURE 3.9 – Vue CAO du fléau du comparateur de forces. Les supports mobiles de lames d'extrémités (ou lames latérales) sont visibles. La masselotte permet d'ajuster le centre de gravité du fléau en la déplaçant le long d'un axe fileté. Le support de la lame flexible centrale est solidaire du fléau par une liaison triangulaire.

- Longueur des bras du fléau (distance entre les pivots) :  $L = L_1 = L_2 = 100 \text{ mm}$  ;
- Largeur 40 mm ;
- Masse du fléau :  $\mu = 260 \text{ g}$  (fléau nu 125,6 g ; systèmes amovibles de fixation des masses latérales 38,6 g ; mors de fixation de la lame centrale 9,6 g ; passage des câbles 2,6 g ; masselotte 78,8 g ; tige de fixation de la masselotte 5,2 g) ;
- Masse des suspensions :  $M = 3 \text{ kg}$ .

Le fléau est schématisé FIGURE 3.10 pour un angle d'inclinaison sur l'horizontale d' $\psi$  infinitésimal. L'objectif est de déterminer la différence d'altitude  $p$  entre les pivots  $P_0$  et  $P_1$  par :

- La connaissance de la différence d'altitude  $e$  entre le point de fixation inférieur de la lame centrale et les points de fixation supérieurs des lames latérales ;
- La connaissance des rayons de courbure  $r$  et  $r_0$  des lames flexibles, c'est-à-dire la distance entre les points de fixation des lames et leur pivot.

### 3.3.2.1 Détermination théorique

**a. Points d'accroche des lames** Le terme  $e$ , différence d'altitude entre le point de fixation inférieur de la lame centrale et les points de fixation supé-

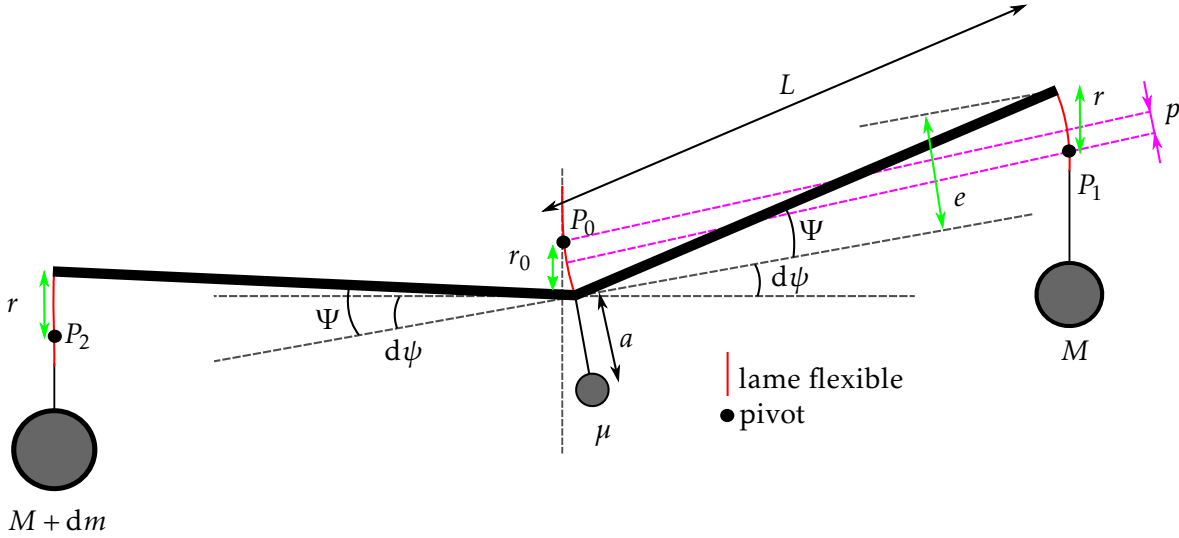


FIGURE 3.10 – Schéma du comparateur de forces pour un angle d’inclinaison  $d\psi$  très petit (fléau horizontal).  $\mu$  est la masse du fléau,  $a$  est la distance entre son centre de masse et le point de fixation inférieur de la lame centrale,  $r_i$  et  $k_i$  sont les rayons (« effectifs ») de courbure et les raideurs en flexion des lames ( $i = 0$  pour la lame centrale et sans index pour les lames latérales),  $M$  est la masse des suspensions et  $dm$  est la masse de surcharge,  $L$  est la longueur du bras du fléau,  $e$  est la différence d’altitude entre le point de fixation inférieur de la lame centrale et les points de fixation supérieurs des lames latérales,  $d\psi$  est l’angle d’inclinaison du fléau par rapport à l’horizontale sous l’effet d’un déséquilibre de masse  $dm$ . La connaissance de la différence d’altitude  $p$  (violet) entre les pivots  $P_0$  et  $P_1$  nécessite de connaître la différence d’altitude  $e$  (vert) entre le point de fixation inférieur de la lame centrale et les points de fixation supérieurs des lames latérales ainsi que les rayons de courbure  $r$  (vert) et  $r_0$  (vert). Toutes les grandeurs sont positives sur cette figure.

rieurs des lames latérales, peut se décomposer de la façon suivante :

$$e = e_r + e_f, \quad (3.9)$$

où  $e_r$  est la différence d’altitude entre les points d’accroche sur le fléau des lames centrale et latérales (sa valeur est fixée par le réglage de la hauteur des systèmes amovibles qui supportent les fixations des lames latérales) et  $e_f$  est la flèche du fléau sous l’effet des masses suspendues à ses extrémités.

Par construction,  $e_r$  vaut  $200 \mu\text{m}$ . À partir de simulations numériques, le fléchissement  $e_f$  est estimé à  $15 \mu\text{m}$  sous une charge de  $3 \text{ kg}$  :

$$e = e_f + e_r = 215 \mu\text{m}. \quad (3.10)$$

**b. Rayons de courbure des lames flexibles** La théorie de la flexion d’une lame sous charge est maintenant bien connue [164, 193–198].

Soit une lame flexible, de largeur  $l$ , de hauteur  $\lambda$  et d’épaisseur  $d$ . Le moment de raideur de cette lame sous une charge  $W$  est la somme du moment

de raideur angulaire et du moment de rappel de charge et a pour expression :

$$k = \frac{\sqrt{E \cdot J \cdot W}}{\sinh\left(\lambda \cdot \sqrt{\frac{W}{E \cdot J}}\right)} + \sqrt{E \cdot J \cdot W} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda}{2} \cdot \sqrt{\frac{W}{E \cdot J}}\right) \quad (3.11)$$

$$k = \sqrt{E \cdot J \cdot W} \cdot \coth\left(\lambda \cdot \sqrt{\frac{W}{E \cdot J}}\right), \quad (3.12)$$

où  $E$  son module d'élasticité de Young et  $J$  son moment quadratique ( $J = \frac{l \cdot d^3}{12}$ ).

L'extrémité d'une lame flexible pivote autour d'un axe virtuel en réponse à un moment (FIGURE 3.11). Par conséquent, l'extrémité mobile de la lame flexible décrit un cercle de rayon  $r$  que l'on nomme le rayon de courbure de la lame flexible. Sa valeur est :

$$r = \frac{\sqrt{E \cdot J \cdot W}}{\tanh\left(\lambda \cdot \sqrt{\frac{W}{E \cdot J}}\right)}, \quad (3.13)$$

Les trois lames utilisées comme pivots du fléau sont identiques. Il s'agit de lames en acier inoxydable laminé de largeur  $l = 20$  mm, de hauteur  $\lambda = 2$  mm et d'épaisseur  $d = 20$   $\mu\text{m}$ . Pour ce matériau, le module d'élasticité de Young vaut  $E = 2 \times 10^{11}$  N  $\cdot$  m<sup>2</sup> et par conséquent, son moment quadratique vaut  $J = 1,3 \times 10^{17}$  m<sup>4</sup>. On peut alors calculer le rayon de courbure  $r$  et la raideur  $k$  d'une telle lame, comme une fonction de la masse suspendue ( $m = W/g$ ,  $g$  accélération de la pesanteur, prise ici égale à 9,81 m  $\cdot$  s<sup>-2</sup>) à son extrémité.

Dans la configuration actuelle, chaque lame latérale ( $r$ ,  $k$ ) supporte une masse de 3 kg alors que la lame centrale ( $r_0$ ,  $k_0$ ) supporte 6,26 kg. Les rayons de courbure et les raideurs ont alors les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} r = 300 \mu\text{m} \\ k = 8,9 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} r_0 = 208 \mu\text{m} \\ k_0 = 12,7 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1} \end{cases} \quad (3.14)$$

**c. Différence d'altitude des pivots** D'après les informations issues de la construction, de la simulation de la flexion et de la théorie des lames flexibles, la différence d'altitude entre les pivots – fléau horizontal – est :

$$p = r + r_0 - e = 290 \mu\text{m}. \quad (3.15)$$

Toutefois, la détermination du rayon de courbure des lames flexibles repose sur une formule négligeant notamment les contraintes dues aux mors (pincement localisé et effet de cisaillement) qui les maintiennent en place, ou encore les effets de plissement.

On effectue donc une seconde détermination reposant sur d'autres propriétés pour s'assurer de cette valeur.

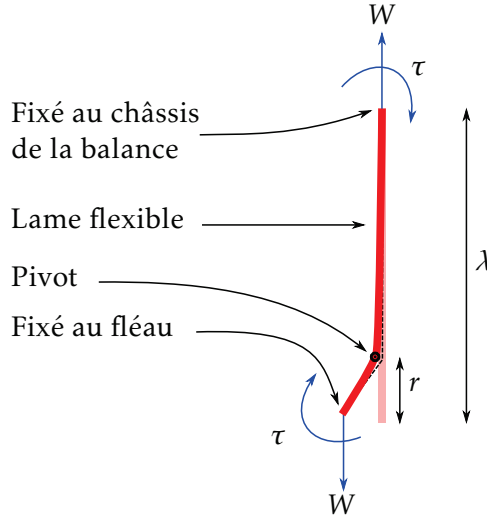


FIGURE 3.11 – Flexion d'une lame flexible de longueur  $\lambda$ , soumise à une charge  $W$  et à un moment  $\tau$ . Son rayon de courbure est  $r$ . On considère que l'axe de rotation de cette lame (son pivot) se situe à la distance  $r$  du fléau.

### 3.3.2.2 Détermination expérimentale

**a. Sensibilité du fléau** La sensibilité angulaire  $S$  du fléau est définie comme le rapport de la déviation  $d\psi$  (à partir de la position d'équilibre) à la surcharge  $dm$  qui le déséquilibre :

$$S = \frac{d\psi}{dm}. \quad (3.16)$$

À l'équilibre, la somme des moments qui s'exercent au point  $P_0$  est nulle (FIGURE 3.10).

Commençons par les raideurs des lames en flexion :

$$\begin{cases} M_{\text{lame } 0/P_0} = -k_0 \cdot d\psi \\ M_{\text{lame } 1/P_0} = -k \cdot d\psi \\ M_{\text{lame } 2/P_0} = -k \cdot d\psi \end{cases} \quad (3.17)$$

Puis viennent les moments des poids (poids des masses suspendues aux extrémités du fléau, poids de la masse du fléau) :

$$\begin{cases} M_{M \cdot \vec{g}/P_0} = -M \cdot g \cdot (L \cdot \cos(\psi + d\psi) + r_0 \cdot d\psi + r \cdot d\psi) \\ M_{\mu \cdot \vec{g}/P_0} = -\mu \cdot g \cdot (r_0 + a) \cdot d\psi \\ M_{(M+dm) \cdot \vec{g}/P_0} = +(M + dm) \cdot g \cdot (L \cdot \cos(\psi - d\psi) - r_0 \cdot d\psi - r \cdot d\psi) \end{cases} \quad (3.18)$$

La nullité de la somme des moments au pivot central  $\sum M_{/P_0} = 0$  permet de déduire la sensibilité  $S$  du fléau à partir de ses propriétés physiques – sa masse, ses dimensions et les caractéristiques de ses pivots :

$$S = \frac{d\psi}{dm} = \frac{L \cdot g}{(a + r_0) \cdot \mu \cdot g + 2 \cdot M \cdot g \cdot \underbrace{(r + r_0 - e)}_p + 2 \cdot k + k_0}. \quad (3.19)$$

On note ainsi que la sensibilité est d'autant plus grande que la longueur du bras est grande, que la masse du fléau, la masse totale suspendue et la raideur des lames sont petites et que le centre de gravité du fléau est proche du centre de rotation de la lame centrale. La sensibilité du fléau dépend également de la différence d'altitude  $p$  des pivots.

Le terme au dénominateur correspond aux moments de rappel du fléau :

- $(a + r_0) \cdot \mu \cdot g$  est le moment de rappel dû à la masse du fléau ;
- $2 \cdot M \cdot g \cdot (r + r_0 - e)$  est le moment de rappel dû aux désalignements des trois pivots  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  ;
- $2 \cdot k$  est le moment de raideur des lames latérales ;
- $k_0$  est le moment de raideur de la lame centrale.

Pour un fléau et une charge donnés, la sensibilité  $S$  du fléau ne dépend donc que de la position de son centre de gravité  $a$ , position qui peut être contrôlée au moyen de la masselotte visible en FIGURE 3.9 (la masse du fléau  $\mu$  ne varie donc pas).

La courbe de sensibilité théorique du fléau  $S = f(a)$ , déduite de l'équation 3.19, est représentée à la FIGURE 3.12 : il est possible d'obtenir une sensibilité infinie du fléau en ajustant la position du centre de gravité au centre de rotation de la lame centrale  $P_0$  (autrement dit en s'assurant que le terme  $(a + r_0) \cdot \mu \cdot g + 2 \cdot m \cdot g \cdot (r + r_0 - e) + 2 \cdot k + k_0$  est nul).

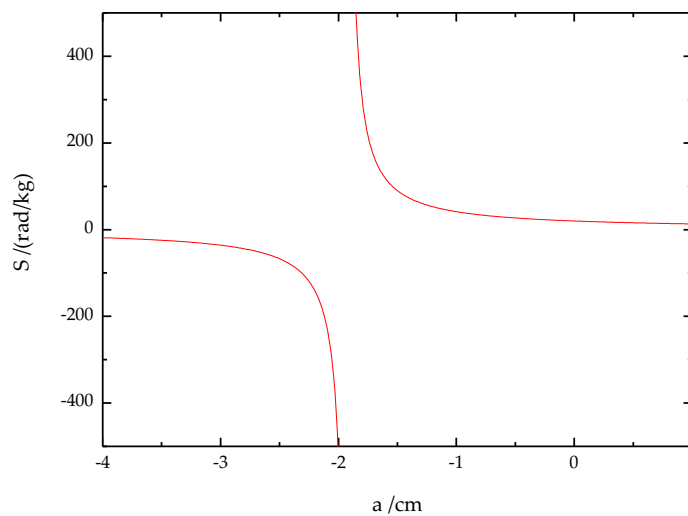


FIGURE 3.12 – Courbe de sensibilité théorique du fléau en fonction de la position de son centre de masse  $S = f(a)$ .

**b. Expérience** L'objectif est d'effectuer une détermination expérimentale de la caractéristique  $S = f(a)$  du fléau qui soit conforme à la théorie (équation 3.19 et FIGURE 3.12). Ceci nous permettra alors de comparer les caractéristiques du fléau avec celles déterminées d'après les propriétés des lames flexibles (section 3.3.2.1), et principalement la distance  $p$  entre les pivots.

Toutes les grandeurs apparaissant dans l'équation 3.19 sont, sinon connues, du moins fixées par la construction, les matériaux ou la charge du fléau. La sensibilité angulaire  $S$ , pour une masse suspendue constante, ne dépend alors que de la position de son centre de gravité  $a$  par rapport au point d'accroche de la lame flexible centrale (FIGURE 3.10). La caractéristique  $S = f(a)$  est la courbe de sensibilité du fléau.

**c. Principe de la mesure** Il n'est pas possible de mesurer la sensibilité angulaire du fléau  $S = \frac{d\psi}{dm}$  en mesurant la déviation angulaire rapportée à la masse déposée ; en effet la position angulaire du fléau étant asservie par rapport à l'horizontale (au moyen d'un capteur gaussien de dynamique 40  $\mu\text{m}$ , FIGURE 2.7 page 44) la variation angulaire est nulle lors de l'ajout d'une masse  $dm$  de déséquilibre.

Toutefois la sensibilité angulaire  $S$  peut s'exprimer comme suit :

$$S = \frac{d\psi}{dm} = \frac{d\psi}{dI} \cdot \frac{dI}{dm}. \quad (3.20)$$

Lorsque le fléau est asservi, la composante verticale de la force de Laplace équilibre le poids à son extrémité :  $m \cdot g = (B \cdot \ell) \cdot I$ . On peut réécrire l'équation précédente de la façon suivante :

$$S = \frac{d\psi}{dI} \cdot \frac{g}{(B \cdot \ell)}. \quad (3.21)$$

Compte tenu de la valeur de  $(B \cdot \ell)$  (section 2.1.4.3 page 46), le terme  $\frac{g}{(B \cdot \ell)}$  a une valeur de  $18,3 \text{ nA} \cdot \text{mg}^{-1}$ .

**d. Procédure expérimentale** On règle la position du centre de gravité du fléau à une valeur  $a$  choisie.

On fixe tout d'abord la consigne d'asservissement du capteur gaussien d'extrémité du fléau à une certaine valeur. On mesure alors l'angle du fléau, ainsi que le courant permettant de l'asservir en position d'équilibre.

Puis on fixe une autre valeur d'asservissement au signal du capteur gaussien, et on mesure à nouveau l'angle du fléau et le courant une fois l'équilibre du fléau atteint.

La procédure est répétée un certain nombre de fois, de manière à estimer la variation d'angle  $d\psi$  entre ces deux consignes, de même que la variation de courant  $dI$  correspondante. La sensibilité vaut alors :

$$S(a) = 18,3 \times 10^{-3} \cdot \frac{d\psi}{dI}, \text{ en rad/kg}. \quad (3.22)$$

Les incertitudes des valeurs de  $S(a)$  sont déterminées par les mesures sur les courants et les angles.

**e. Application expérimentale** Le système de réglage de la position du centre de gravité  $a$  du fléau est constitué d'une tige filetée de longueur 10,5 cm sur laquelle on déplace une masselotte de 78,8 g. La valeur de cette masse a été choisie pour pouvoir décrire la discontinuité de la courbe  $S = f(a)$ . D'après la FIGURE 3.12, on voit qu'il faut déplacer le centre de masse du fléau de près de 2 cm.

La variation de consigne du capteur gaussien est de 0,3 V ce qui correspond à une inclinaison du fléau de l'ordre de 140  $\mu\text{rad}$ . Lors d'une détermination, les courants sont mesurés par la chute de tension qu'ils produisent aux bornes de la résistance de 200  $\Omega$ , au moyen d'un voltmètre à échantillonnage sur une durée de 50 s avec un temps d'intégration de 200 ms (chaque valeur de courant correspond donc à une moyenne de 250 mesures). Les courants mesurés, correspondant à un défaut de masse d'environ 200 g, sont de l'ordre de 4 mA et les écart-types associés sont inférieurs à 0,8  $\mu\text{A}$ . La séquence de détermination comporte une dizaine de points de mesure pour chacun des points  $S(a)$ .

La caractéristique expérimentale  $S = f(a)$  est présentée sur la FIGURE 3.13. L'origine des abscisses correspond au point de fixation de la lame centrale. Cette lame supporte la masse du fléau (y compris la masselotte de 78,8 g fixée sous le fléau pour ajuster la position  $a$  du centre de gravité) et celle des deux suspensions, soit une masse totale de 6,26 kg. Dans ces conditions, le rayon de courbure  $r_0$  de la lame centrale vaut par théorie 208  $\mu\text{m}$  (équation 3.14) et on le représente d'un trait tireté vert sur la figure : il indique la position de l'axe de rotation du fléau par rapport à la distance  $a$ . Les configurations « fléau nu » et « fléau chargé » correspondent au comparateur de forces sans et avec le système de réglage de la position du centre de gravité du fléau.

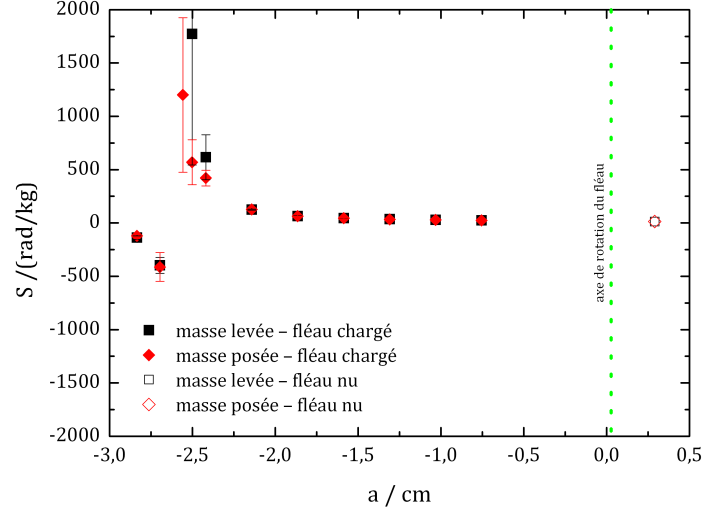
Dans la configuration « fléau nu », le centre de gravité du fléau se trouve 2,9 mm au-dessus de son centre de rotation (la position du centre de gravité étant obtenue au moyen du logiciel SolidWorks). Sa sensibilité mesurée est alors de 13 rad/kg.

Dans la configuration « fléau chargé », pour décrire sur une portion significative la caractéristique  $S = f(a)$ , il faut déplacer le centre de gravité du fléau de près de 3 cm ce qui revient, en position extrême à placer sous le fléau la masselotte à l'extrémité de la tige de 10,5 cm. La sensibilité du fléau augmente avec la distance  $a$  jusqu'à la zone de discontinuité ou zone de grande sensibilité du fléau ( $S > 200 \text{ rad/kg}$ ) pour des valeurs de  $a$  comprises entre 2,3 cm et 2,8 cm. L'écart-type  $s(S)$  associé à la mesure de  $S$  est plus important dans cette zone. Par exemple, pour une sensibilité de 420 rad/kg, la valeur de  $s(S)$  vaut 73 rad/kg alors que les valeurs de  $s(S)$  restent toujours inférieures à 0,4 rad/kg pour des sensibilités mécaniques inférieures à 30 rad/kg.

Au-delà de la zone de discontinuité, la sensibilité change de signe et décroît.

Les courbes de sensibilité ont été tracées pour les deux phases de la pesée, c'est-à-dire en configurations masse posée et masse levée. Aucune différence significative n'est à noter entre les deux configurations.



FIGURE 3.13 – Courbes expérimentales de sensibilité du fléau  $S = f(a)$ .

**f. Remarques sur les écart-types associés aux mesures de courant, d'angle d'inclinaison du fléau et de sensibilité** Quelle que soit la sensibilité du fléau, la variation d'angle  $d\psi$ , correspondant à une variation de consigne de 0,3 V, est de l'ordre de 140  $\mu\text{rad}$  et l'écart-type associé est toujours inférieur à 1  $\mu\text{rad}$ . En revanche, la valeur du courant  $dI$  dépend, par définition, de la sensibilité du fléau.

La variation absolue de ce courant est tracée sur la FIGURE 3.14 en fonction de la position du centre de gravité du fléau avec un minimum autour de  $a = -2,6$  cm correspondant à la sensibilité maximale. Il est intéressant de noter que quelle que soit la valeur du courant et donc la valeur de la sensibilité du fléau, l'écart-type associé  $s(dI)$  est constant et inférieure à 2 nA : les mesures s'effectuent toujours avec le même écart-type sur l'intensité, mais la valeur de l'intensité mesurée décroît au fur et à mesure que l'on s'approche de la zone de discontinuité.

La variation d'écart-type sur la sensibilité  $s(S)$  observée en FIGURE 3.13 ne s'explique donc pas par une variation d'écart-type des mesures de courant ( $s(dI)$  restant constant, FIGURE 3.14), ni par des variations d'angles (toujours inférieur à 1  $\mu\text{rad}$ ). Elle s'explique en considérant que  $s(S)$  est égale au produit de la sensibilité du fléau par la variation relative du rapport  $\frac{s(dI)}{dI}$ , en négligeant le terme  $\frac{s(d\psi)}{d\psi}$  :

$$s(S) \simeq S \cdot \frac{s(dI)}{dI}. \quad (3.23)$$

Lorsque la sensibilité augmente, le terme  $s(S)$  augmente en proportion, sans que cela soit pénalisant pour nos mesures.

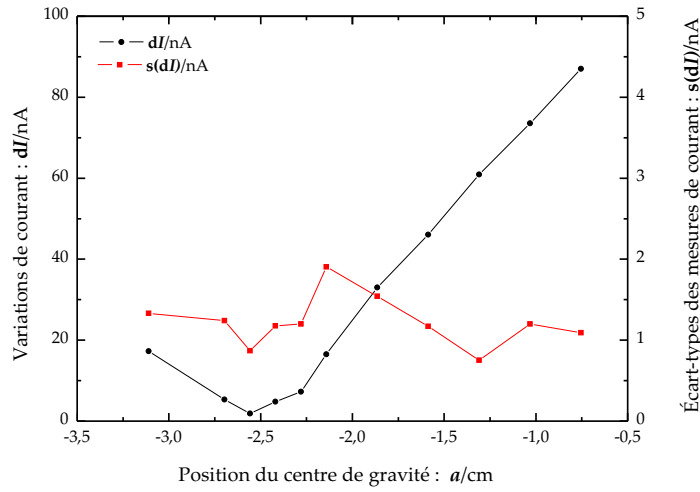


FIGURE 3.14 – Variations de courant  $dI$  mesurées et écart-types expérimentaux  $s(dI)$  associés en fonction de la position du centre de gravité  $a$  du fléau, en configuration masse levée.

**Comparaison des résultats expérimentaux à l'analyse théorique** Nous avons tracé à la FIGURE 3.12 la courbe théorique  $S = f(a)$  en utilisant les paramètres numériques à notre disposition (section 3.3.2.1).

Elle est reportée en rouge sur la FIGURE 3.15, où l'on a également tracé les mesures de sensibilité effectuées : il apparaît immédiatement que l'asymptote verticale de la sensibilité théorique ne se superpose pas à celle des déterminations expérimentales.

Il est nécessaire d'augmenter la valeur des raideurs des lames  $k$  et  $k_0$  de 50 %, et donc d'utiliser les valeurs  $k' = 1,5 \cdot k$ ,  $k'_0 = 1,5 \cdot k_0$  pour obtenir une courbe théorique qui se superpose aux courbes expérimentales (en bleu à la FIGURE 3.15).

On peut supposer que la valeur expérimentale de la raideur en flexion des pivots est supérieure à la valeur théorique en raison notamment de la qualité de pincement des pivots et leurs déformations résultantes (les lames ne sont plus planes).

Sous réserve d'accepter cette seule augmentation de la raideur des lames, les rayons de courbure calculés à partir de la formule théorique peuvent donc être une estimation satisfaisante de la courbure réelle des lames sur l'expérience.

La position de l'asymptote verticale permet alors d'obtenir la différence d'altitude  $p$ , depuis l'équation 3.19 :

$$p = \frac{(2 \cdot k' + k'_0) - (a + r_0) \cdot \mu \cdot g}{2 \cdot m \cdot g} = 300 \text{ } \mu\text{m} \quad (3.24)$$

Dans ce cas, la valeur de  $p$  déterminée est égale à 300  $\mu\text{m}$ , proche de la valeur estimée précédemment.

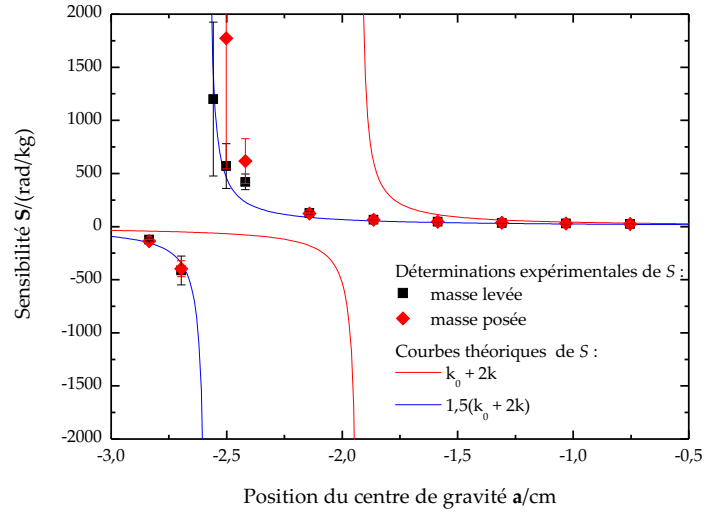


FIGURE 3.15 – Comparaison des courbes de sensibilité expérimentale et théorique fléau.

La valeur théorique et la valeur utilisée des raideurs des lames flexibles pour expliquer la caractéristique de sensibilité du fléau sont du même ordre de grandeur, mais avec un écart relatif de 50 %. L'expression théorique est une expression approchée qui induit une incertitude sur la valeur calculée. D'autre part, les causes d'erreur sur la valeur expérimentale peuvent provenir en partie du fait que la lame d'acier inoxydable présente des contraintes directionnelles de laminage. En conséquence, le module d'Young pour cette direction pourrait différer de manière importante de la valeur théorique adoptée. De plus, il apparaît également des contraintes inhomogènes de serrage le long des mors de fixation qui modifient les caractéristiques de la lame.

### 3.3.3 Conclusion

L'angle du fléau sur l'horizontale a été ajusté à la valeur  $\psi = (0 \pm 100) \mu\text{rad}$ .

Les deux déterminations de la distance  $p$  séparant les pivots du fléau effectuées *supra* conduisent à une valeur de  $300 \mu\text{m}$ .

La combinaison de ces deux résultats permet d'estimer la valeur de l'angle des pivots sur l'horizontale :

$$\alpha = \psi + \frac{p}{L} \simeq 3 \times 10^{-3} \text{ rad.} \quad (3.25)$$

L'axe de rotation du pivot central est donc plus haut que les axes de rotation des pivots latéraux, comme l'illustre la FIGURE 3.16.

On peut conclure en retenant que le fléau se comporte en terme de sensibilité comme un fléau symétrique dont les lames auraient les rayons de courbures prévus par la théorie, mais des raideurs 50 % plus élevées. On estime

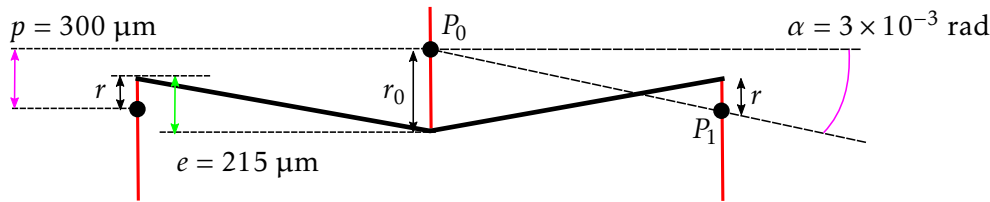


FIGURE 3.16 – Position relative des centres de rotation du fléau du comparateur de forces. Les points de fixation des lames flexibles au fléau sont séparées de  $e = 215 \mu\text{m}$  (sous charge), les pivots sont séparés de la distance verticale  $p = 300 \mu\text{m}$  et de l'angle  $\alpha = 3 \times 10^{-3} \text{ rad}$ .

alors que les pivots sont inclinés sur l'horizontale d'un angle  $\alpha \simeq 3 \times 10^{-3} \text{ rad}$  lorsque le corps du fléau lui-même est à l'horizontale : la valeur de cet angle sera nécessaire pour déterminer l'incertitude-type sur la comparaison de forces  $u_r(f)$  intervenant dans la détermination de la valeur de la constante de Planck lorsque la valeur relative des forces longitudinales  $\frac{F_x}{F_z}$  sera connue (consulter le chapitre 5).

Ces deux méthodes de détermination de la grandeur  $p$  restent néanmoins fragiles et donnent une amplitude indicative. Des solutions pour obvier à la méconnaissance de la position des pivots seront données en conclusion de ce manuscrit.

## 3.4 Capteurs de position

### 3.4.1 Position du problème

Cinq capteurs de position sont intégrés dans le dispositif expérimental : un pour l'asservissement du fléau, un pour le repérage de la position de la bobine sur l'axe vertical afin de contrôler les déclenchements en phase dynamique et enfin, trois pour la détermination des mouvements parasites de la bobine en phase statique et en phase dynamique.

Selon leurs applications sur la balance, ces capteurs ont des contraintes spécifiques :

- *Asservissement du fléau.* L'exploitation du fléau requiert d'en asservir l'équilibre. Pour cela, un détecteur optique repère sa position angulaire et génère un signal d'erreur lorsqu'il est hors équilibre. L'asservissement génère alors un courant qui parcourt la bobine et permet de ramener le fléau à sa position nominale (FIGURE 2.7 page 44).
- *Position verticale de la bobine.* Un capteur est utilisé pour déclencher les mesures en phase dynamique. Ce déclenchement s'effectue par l'intermédiaire d'une fente solidaire de la bobine, se déplaçant devant

un capteur solidaire du circuit magnétique. Ainsi, le démarrage des phases dynamiques s'effectue pour une position absolue de la bobine par rapport à l'aimant (FIGURE 2.16 page 59).

- *Position dans le plan horizontal de la bobine.* La position de la bobine doit être repérée dans le plan horizontal (FIGURE 2.16 page 59) avec une incertitude plus faible que le micromètre à l'échelle de l'heure : nous souhaitons une incertitude plus faible que le micromètre notamment pour avoir une bonne connaissance des forces et moments parasites (voir à ce sujet le chapitre 4) existant lors de la phase statique, et cela sur une durée d'une heure, qui correspond à la durée typique de la phase statique (voir chapitre 5). C'est cette configuration que nous allons étudier dans les sections suivantes.

### 3.4.2 Principe et théorie

Un capteur optique a été développé en 2006 afin d'assurer la répétabilité de positionnement du fléau : il a été choisi de l'utiliser pour tous les besoins de mesure de position, à l'exception des mesures effectuées par interférométrie (position verticale).

La solution retenue utilisait les propriétés de propagation des faisceaux gaussiens et de leur modulation spatiale [185]. Son principe consiste à utiliser deux faisceaux laser parallèles modulés en opposition de phase. Ces deux faisceaux sont dirigés vers une fente solidaire de l'objet à positionner. En sortie de fente, les faisceaux résultants sont captés par une photodiode. Le signal électrique en sortie de la photodiode est alors démodulé par un amplificateur à détection synchrone.

L'objectif est de fournir les équations donnant la puissance reçue par un détecteur. Ces équations ne prennent pas en compte le gain variable d'une détection synchrone.

Le capteur est composé de deux faisceaux gaussiens, supposés parallèles, et d'une fente de largeur  $\Delta$  (FIGURE 3.17). Chaque faisceau est supposé défini par les paramètres suivants :

- $P_{0,i}$  : puissance du faisceau  $i$  ;
- $\omega_{x,i}$  et  $\omega_{y,i}$  : rayons du col du faisceau  $i$  ( $\omega_{x,i} \neq \omega_{y,i}$  au niveau de la fente si les faisceaux ne sont pas axisymétriques).
- $x_{0,i}$  et  $y_{0,i}$  : coordonnées du centre du faisceau  $i$ .

On appelle  $x_f$  la position de la fente selon l'axe  $x$  (elle est supposée infiniment haute selon l'axe  $y$ ).

Chacun des deux faisceaux est alternativement obstrué (modulation). Le signal  $P(x_f)$  mesuré lorsque la fente est à la position  $x_f$ , après passage par une détection synchrone, est donc la différence de la fraction des deux faisceaux passant par la fente (l'un « positif » car en phase et l'autre « négatif » car en opposition de phase).

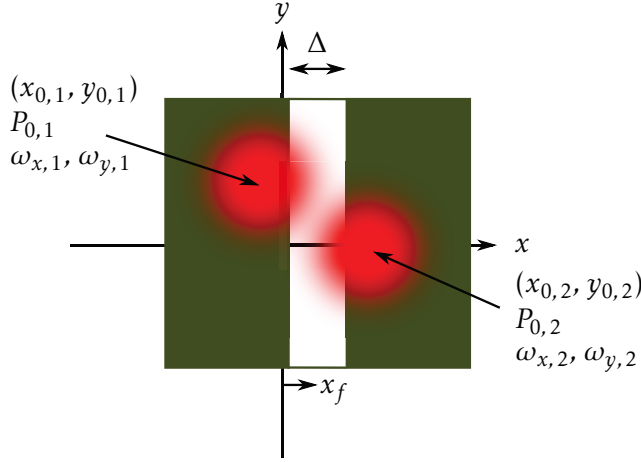


FIGURE 3.17 – Principe du capteur gaussien double faisceau. Une fente, d'extension infinie selon  $y$  et de largeur  $\Delta$  selon  $x$  obstrue deux faisceaux lasers gaussiens modulés en opposition de phase. La puissance collectée par une photodiode placée derrière la fente est fonction de la position  $x_f$  de celle-ci.

Chacun des deux faisceaux gaussiens est ainsi défini par son intensité :

$$I_1(x, y) = \frac{2 \cdot P_{0,1}}{\pi \cdot \omega_{x,1} \cdot \omega_{y,1}} \cdot \exp \left[ -2 \cdot \left( \left( \frac{x - x_{0,1}}{\omega_{x,1}} \right)^2 + \left( \frac{y - y_{0,1}}{\omega_{y,1}} \right)^2 \right) \right], \quad (3.26)$$

$$I_2(x, y) = \frac{2 \cdot P_{0,2}}{\pi \cdot \omega_{x,2} \cdot \omega_{y,2}} \cdot \exp \left[ -2 \cdot \left( \left( \frac{x - x_{0,2}}{\omega_{x,2}} \right)^2 + \left( \frac{y - y_{0,2}}{\omega_{y,2}} \right)^2 \right) \right]. \quad (3.27)$$

En intégrant les deux équations précédentes, on obtient pour  $P(x_f)$ , l'intensité collectée par la photodiode en fonction de la position  $x_f$  de la fente :

$$\begin{cases} P_1(x_f) = \frac{P_{0,1}}{2} \cdot \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega_{x,1}} \cdot \left( x_f - x_{0,1} + \frac{\Delta}{2} \right) \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega_{x,1}} \cdot \left( x_f - x_{0,1} - \frac{\Delta}{2} \right) \right) \right] \\ P_2(x_f) = \frac{P_{0,2}}{2} \cdot \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega_{x,2}} \cdot \left( x_f - x_{0,2} + \frac{\Delta}{2} \right) \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega_{x,2}} \cdot \left( x_f - x_{0,2} - \frac{\Delta}{2} \right) \right) \right] \\ P(x_f) = P_1(x_f) - P_2(x_f) \end{cases} \quad (3.28)$$

Seule la valeur des cols des faisceaux ( $\omega_{x,1}$ ,  $\omega_{x,2}$ ) perpendiculaire à l'axe de la fente est pertinente.

L'équation précédente est donc celle qu'il faudrait utiliser pour comparer la réponse du capteur à la réponse attendue. Dans cette équation, certains paramètres sont fixés par construction :

- Les valeurs des cols des deux faisceaux,  $\omega_{x,1}$  et  $\omega_{x,2}$ , fonctions *a priori* des fibres optiques et des collimateurs.
- La séparation spatiale des faisceaux  $x_{0,1} - x_{0,2}$ , ainsi que la largeur de la fente  $\Delta$ , sont fixées mécaniquement.

### 3.4.3 Démonstration antérieure à cette thèse

La dynamique de ce type de capteur est fonction de la séparation spatiale des faisceaux et de leur rayon de col. On peut donc faire varier cette dynamique de quelques millimètres (faisceaux issus d'un collimateur de fibre optique, et séparés de quelques millimètres – configuration « faisceaux parallèles ») à quelques dizaines de micromètres (faisceaux focalisés par une lentille convergente de forte vergence, configuration « faisceaux convergents »).

Une caractérisation de la réponse du dispositif a été effectuée en 2008 [185] en déterminant la réponse du détecteur au déplacement de la fente, ce dernier étant mesuré par interférométrie (FIGURE 3.18).

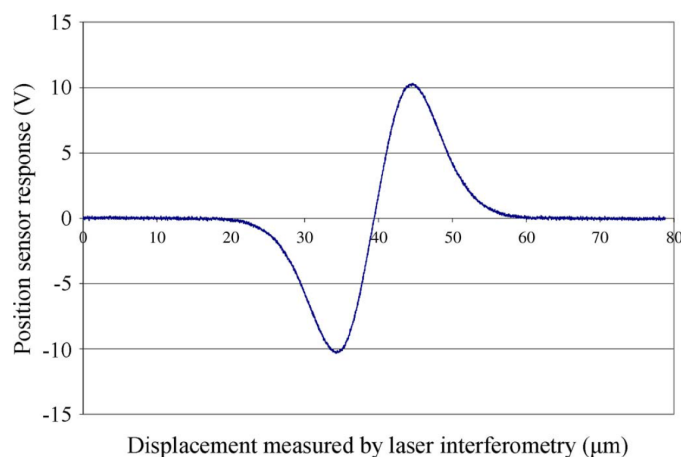


FIGURE 3.18 – Réponse en tension du capteur gaussien double faisceau, utilisé en configuration faisceaux convergents. Figure issue de [185].

### 3.4.4 Caractérisation *in situ* des capteurs gaussiens à deux faisceaux

Chaque capteur nécessite deux fibres optiques monomodes pour injecter les deux faisceaux modulés en opposition de phase et une fibre multimode pour récupérer le signal de sortie. Les quinze fibres optiques nécessaires, d'une dizaine de mètres chacune, sont positionnées entre la table optique placée dans la salle instrumentation et l'enceinte de la balance proprement dite, située dans la salle blanche attenante. Le dispositif expérimental comprend également une source laser, l'électronique de modulation, cinq photodiodes et cinq détecteurs synchrones.

Le capteur utilisé en configuration faisceaux parallèles (dynamique 1 mm à 2 mm) permet la translation de la fente dans la direction des faisceaux, sans que la réponse à un déplacement perpendiculairement aux faisceaux soit

modifiée, ce qui est particulièrement adapté à la mesure des vitesses de la bobine dans le plan horizontal, tandis que la bobine se meut verticalement. Ce type de capteur sera utilisé pour mesurer la rotation selon l'axe vertical et les translations dans le plan horizontal de la bobine en phase dynamique, sur l'intégralité de sa course, de même que pour le déclenchement en phase dynamique.

Le capteur utilisé en configuration faisceaux convergents (dynamique de  $25\text{ }\mu\text{m}$  à  $50\text{ }\mu\text{m}$ ) permet de scruter avec une très bonne résolution le mouvement de l'extrémité du fléau.

Les capteurs de position ont été mis en place au sein de la balance du watt : une tête d'injection spécifiquement développée par le METAS était utilisée.

La caractérisation des capteurs de position s'est faite en deux étapes :

- Détermination de la courbe de réponse des capteurs c'est-à-dire l'évolution de l'intensité lumineuse recueillie par la photodiode en fonction du positionnement du faisceau incident par rapport à la fente ;
- Étude de la stabilité du faisceau recueilli par la photodiode.

La première étape est réalisée en fixant la position des faisceaux incidents (configuration faisceaux parallèles) et en déplaçant la fente au moyen d'une platine de translation par pas de  $100\text{ }\mu\text{m}$ . Pour chaque position, on mesure la tension moyenne aux bornes de la photodiode en un temps d'acquisition court (10 secondes). La FIGURE 3.19 présente les résultats expérimentaux (points noirs) qui montrent l'allure attendue.

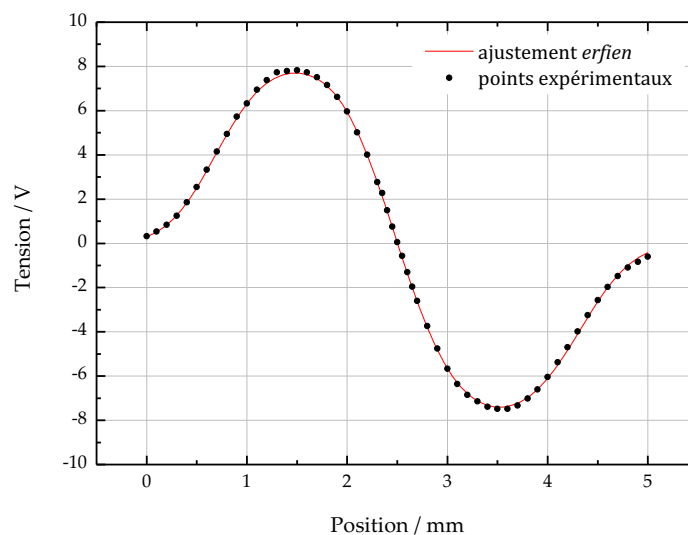


FIGURE 3.19 – Mesure de la réponse du capteur de position à deux faisceaux en configuration faisceaux parallèles, auquel on a superposé un ajustement par l'équation 3.28 (« ajustement *erfien* »).

L'étape suivante consistait à mesurer, pour une position donnée et fixée de la fente (au voisinage du zéro du capteur, le gain est d'environ  $10\text{ V} \cdot \text{mm}^{-1}$ ),



la tension aux bornes de la photodiode pour des temps d'acquisition longs, typiquement 2000 secondes et pour une durée d'intégration de 100 ms. La connaissance de la courbe de réponse du capteur gaussien double faisceau permet alors de transcrire cette information de puissance en termes de position. Les résultats sont présentés à la FIGURE 3.20 en noir.

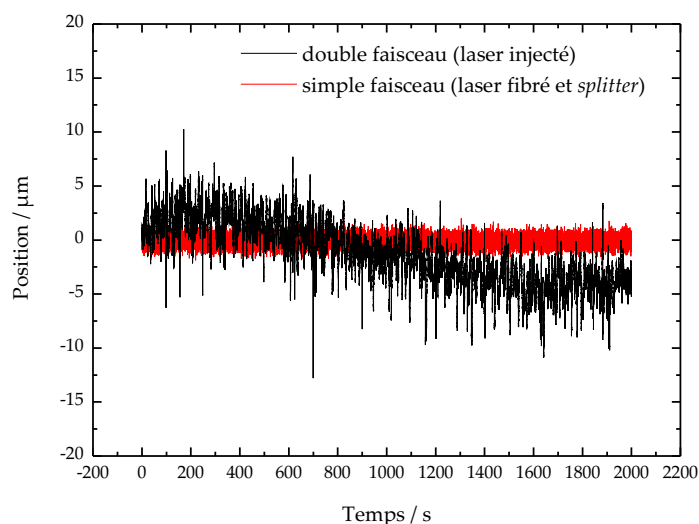


FIGURE 3.20 – Comparaison de la position mesurée d'une fente fixe par un *capteur gaussien double faisceau* dont le faisceau est issu d'une diode laser injectée dans une fibre optique monomode (noir) et de position mesurée par un *capteur gaussien simple faisceau* dont le faisceau laser est issu d'une diode fibrée et d'un *splitter* de fibre (rouge). Les deux signaux ont été échantillonnés à une fréquence de 10 Hz.

On a constaté un bruit d'environ 10  $\mu\text{m}$  crête-à-crête et une dérive d'environ 1  $\mu\text{m}$  pour 100 s. Ce bruit et cette dérive ne sont pas acceptables, puisque nous souhaitons déterminer la position de la bobine avec une incertitude plus faible que le micromètre à l'échelle de la journée.

Nous avons cherché à identifier à quel point de la chaîne d'instrumentation ce bruit d'intensité et cette dérive apparaissaient. L'électronique (photodiodes, carte d'acquisition, détection synchrone) a été mise hors de cause, de même que la diode laser elle-même.

Les problèmes rencontrés provenaient de l'utilisation des fibres : l'injection des faisceaux dans le cœur des fibres monomodes pose problème en termes de stabilité de puissance injectée de même que l'utilisation de quinze fibres de dix mètres de longueur rend le système de mesures particulièrement sensible aux perturbations extérieures comme les vibrations.

Malgré toutes les précautions prises, il a été impossible dans cette configuration d'obtenir une stabilité en puissance injectée qui garantisse une stabilité de position mesurée à mieux que le micromètre.

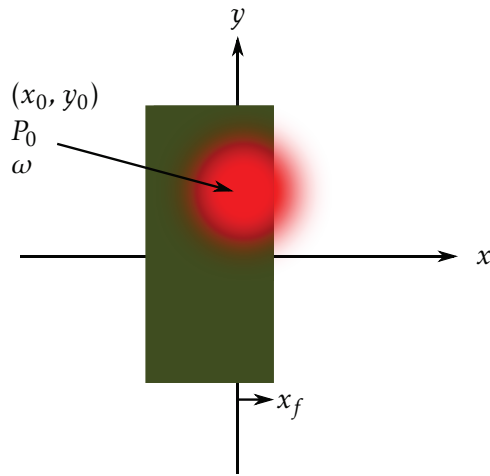


FIGURE 3.21 – Principe du capteur gaussien simple faisceau. Une lame opaque, d'extension infinie selon  $y$  obstrue un faisceau laser gaussien. La puissance collectée par une photodiode placée derrière la fente est fonction de la position  $x_f$  de celle-ci.

### 3.4.5 Simplification des capteurs de position

#### 3.4.5.1 Modification apportée aux capteurs de position initiaux

Nous avons donc modifié le dispositif expérimental en n'utilisant qu'un seul faisceau (FIGURE 3.21) et en cherchant systématiquement à diminuer le nombre des fibres optiques. Ainsi, le conditionnement des faisceaux lasers est assuré par une diode laser fibrée associée à un diviseur de fibre (*splitter*) à 8 voies. Le couplage diode laser – diviseur de fibre *splitter* devrait présenter une bonne stabilité mécanique. Par ailleurs, le principe de la division du faisceau laser par fibres fondues devrait permettre d'assurer une bonne stabilité de la répartition de la puissance entre les différentes sorties.

Le faisceau issu de la fibre optique est mis en forme par une lentille convergente et dirigé vers la fente opaque.

La détection synchrone peut être utilisée comme amplificateur du signal, mais son utilisation est superflue : on peut si on le souhaite s'affranchir de la modulation.

Dans une telle configuration, la réponse des capteurs est différente de celle proposée en section 3.4.2.

On peut déterminer la réponse théorique de ces capteurs en suivant le même raisonnement que les capteurs deux faisceaux. On mènera le calcul pour un faisceau axisymétrique. L'intensité lumineuse  $I$  en tout point d'un axe  $\vec{x}$  perpendiculaire à un faisceau gaussien pour le mode transverse électromagnétique 00 ( $TEM_{00}$ , *waist*  $\omega_0$ , puissance totale  $P_0$ ) peut s'écrire :

$$I(x) = P_0 \cdot \frac{2}{\pi \cdot \omega_0^2} \cdot \exp \left[ -2 \cdot \left( \frac{x}{\omega_0} \right)^2 \right]. \quad (3.29)$$

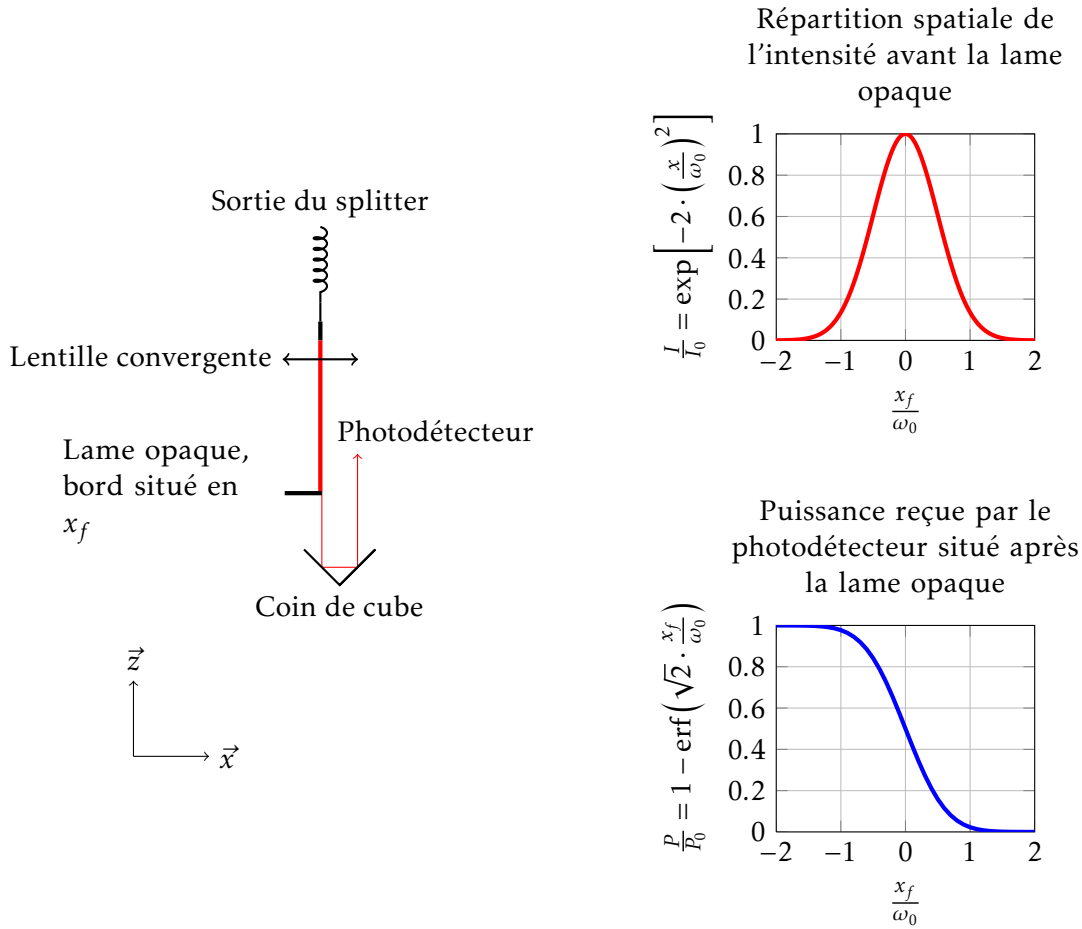


FIGURE 3.22 – Réponse en intensité des capteurs gaussiens simple faisceau : un écran opaque, situé à l'abscisse  $x_f$ , interrompt le trajet d'un faisceau laser gaussien dont la répartition spatiale d'intensité dans la direction  $\vec{x}$  est donnée par la courbe rouge  $\frac{I}{I_0} = \exp\left[-2 \cdot \left(\frac{x}{\omega_0}\right)^2\right]$ . La puissance reçue par le photodétecteur relativement à la puissance totale du faisceau incident,  $\frac{P}{P_0} = 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{2} \cdot \frac{x_f}{\omega_0}\right)$ , est tracée en bleue.

Si un écran opaque, d'extension infinie perpendiculairement à l'axe  $x$ , est placé sur le trajet du faisceau gaussien à l'abscisse  $x_f$ , la puissance  $P(x_f)$  transmise à un photodétecteur situé derrière cet écran (voir FIGURE 3.22) est proportionnelle à l'intégrale de la gaussienne précédente, soit à une fonction d'erreur :

$$P(x_f) = \int_{-\infty}^{x_f} I(x) \cdot dx = \frac{P_0}{2} \cdot \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{2} \cdot \frac{x_f}{\omega_0} \right) \right]. \quad (3.30)$$

La réponse du capteur s'exprime de façon analytique, mais la détermination du rayon du col du faisceau gaussien et de la puissance totale reçue par le photodétecteur reste toutefois délicate expérimentalement. C'est pourquoi ces capteurs seront étalonnés par comparaison à la longueur d'onde de référence du laser d'un interféromètre au moyen d'un dispositif de transfert : le déplacement connu d'une lame métallique permet de calibrer leur réponse.

De façon similaire à la version précédente des capteurs, nous avons effectué une première calibration de ce capteur gaussien en configuration simple faisceau, et obtenu un gain d'environ  $2 \text{ V} \cdot \text{mm}^{-1}$  (l'absence de détection synchrone expliquant en la différence de gain).

#### 3.4.5.2 Caractérisation des nouveaux capteurs de position

Le premier objectif de ces modifications (un seul faisceau, splitter de fibre) était l'amélioration de la stabilité de la puissance de sortie des fibres optiques.

Pour une position donnée de la fente, nous avons à nouveau mesuré le bruit en position. Nous avons tout d'abord effectué des acquisitions des puissances émises par les huit fibres optiques, sur une durée de 2000 s, à une fréquence de 10 Hz. L'information équivalente en position à la sortie de la première de ces huit fibres est représentée en rouge à la FIGURE 3.20. Les sept autres fibres sont comparables.

L'écart-type des résultats obtenus est de l'ordre de  $0,8 \text{ } \mu\text{m}$ , et ne présente plus de dérive observable à l'échelle de temps d'une journée.

Nous avons ensuite répété la même expérience, mais en effectuant les mesures durant 3 jours, avec une fréquence d'échantillonnage de 0,1 Hz. La puissance mesurée à la sortie de la première des huit fibres est représentée en rouge à la FIGURE 3.23. Les puissances issues des sept autres fibres sont tout à fait comparables.

Cette courbe met en évidence une dérive à long terme d'environ  $4 \text{ } \mu\text{m}/\text{jour}$ .

Nous avons alors supposé que cette dérive était essentiellement due à la dérive de la puissance émise par la diode laser, et nous nous sommes intéressés au rapport des puissances de sortie des fibres du splitter : ce rapport est imposé par construction.

Si  $P(t)$  est la puissance, variable dans le temps et inconnue, injectée dans le diviseur de fibre, la voie 0 de sortie en reçoit la fraction  $\alpha_0$ . La puissance transmise par la voie 0 est alors  $P_0(t) = \alpha_0 \cdot P(t)$ . De la même façon la voie 1 transmet la puissance  $P_1(t) = \alpha_1 \cdot P(t)$ .

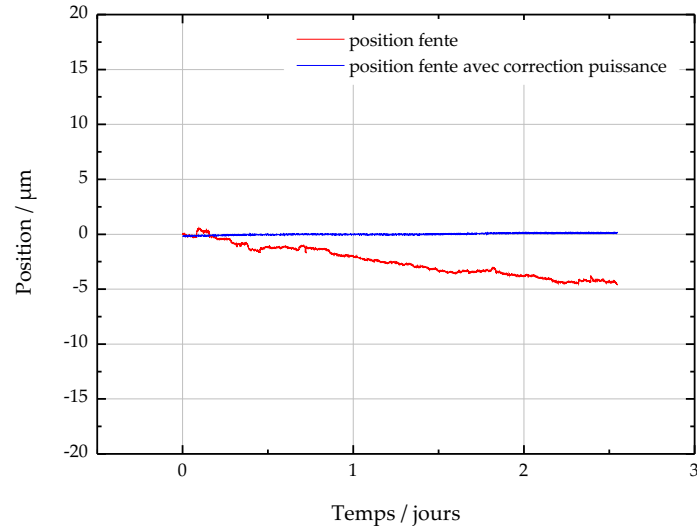


FIGURE 3.23 – Comparaison de la position mesurée d’une fente fixe par un capteur gaussien et de celle mesurée en corrigeant les variations de puissance. *Courbe rouge* : Position mesurée par un capteur gaussien simple faisceau dont le faisceau laser est issu d’une diode fibrée et d’un *splitter* de fibre, scrutant une fente fixe. *Courbe bleue* : Position mesurée en corrigeant les variations de puissance par une fibre de référence. Les deux signaux ont été échantillonnés à une fréquence de 0,1 Hz.

Si on mesure à chaque instant la puissance émise par la fibre de référence  $P_0(t)$ , et que l’on tient pour constant dans le temps les rapports  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ , on peut alors avoir accès à la puissance émise par la fibre 1, et cela sans effectuer la mesure :  $P_1(t) = \frac{P_0(t_0)}{P_1(t_0)} \cdot P_0(t)$  (FIGURE 3.24). Ainsi, en déterminant préalablement à l’expérience le rapport  $\frac{P_0(t_0)}{P_1(t_0)}$  par la mesure du rapport de la puissance de deux voies à l’instant  $t_0$ , il est possible de s’affranchir des variations de puissance de la source laser.

Ainsi, en se choisissant une sortie de référence, l’évolution du rapport des puissances d’une sortie quelconque est plus favorable, comme on peut le constater en bleu à la FIGURE 3.23. La dérive est alors de l’ordre de 0,2 μm/jour ou encore 10 nm/heure.

### 3.4.6 Étalonnage de la réponse des capteurs gaussiens

La stabilité des capteurs de position étant déterminée, nous effectuons à présent l’étalonnage de leur réponse.

#### 3.4.6.1 Dispositif d’étalonnage

L’étalonnage des capteurs de position est effectué au moyen d’un dispositif (représenté à la FIGURE 3.25) permettant le déplacement d’une lame

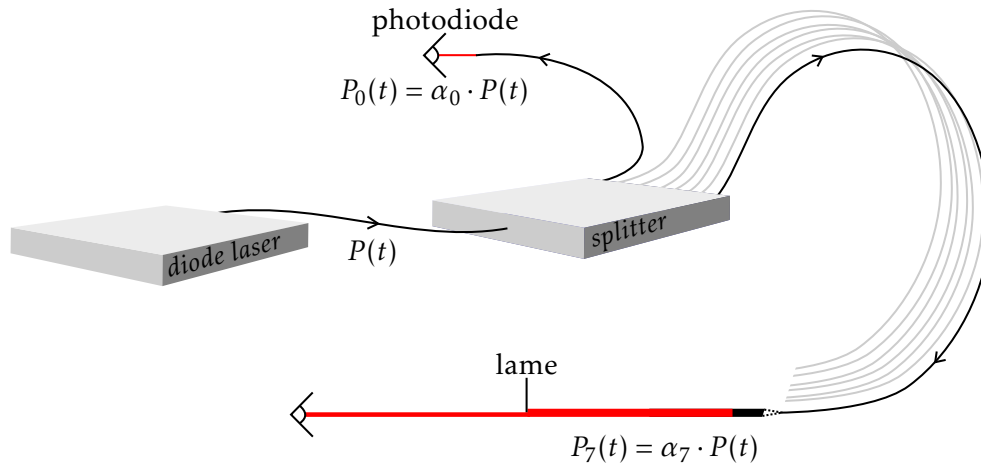


FIGURE 3.24 – Diode laser fibrée couplée à un diviseur de fibre, une entrée, huit sorties. La puissance émise par la diode laser est  $P(t)$ . Une fraction  $P_0(t) = \alpha_0 \cdot P(t)$  est émise par une des fibres, choisie comme référence, et mesurée par une photodiode en permanence. L'intensité incidente à la lame opaque de la fibre 7 est  $P_7(t) = \alpha_7 \cdot P(t)$  inconnue, mais peut être estimée en ayant mesuré le rapport de puissance des voies sans la lame à la date  $t_0$  :  $P_7(t) = \frac{P_0(t_0)}{P_7(t_0)} \cdot P_0(t)$ .

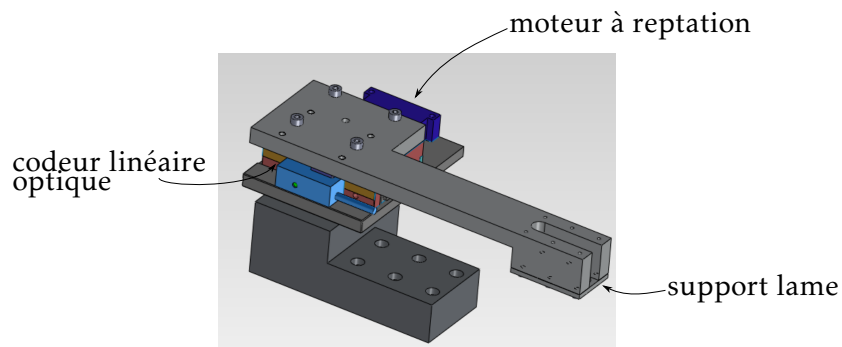


FIGURE 3.25 – Vue CAO du dispositif utilisé pour l'étalonnage des capteurs de position

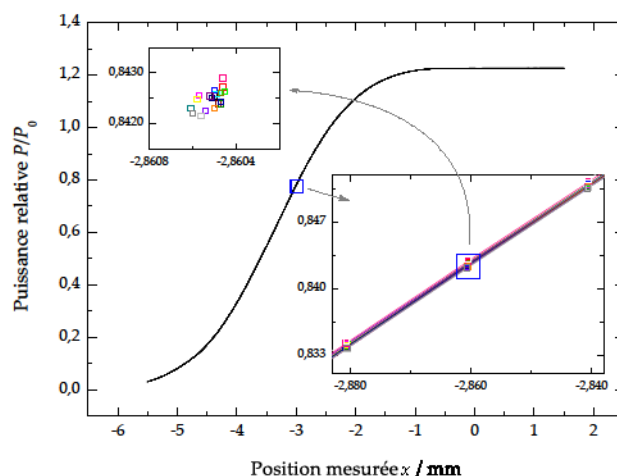


FIGURE 3.26 – Répétabilité des courbes de réponse d'un capteur de position gaussien simple faisceau. On a représenté 20 de ces courbes.

métallique au moyen d'un moteur à reptation perpendiculairement au faisceau gaussien dont on veut étalonner la répartition spatiale d'intensité. Ce déplacement est mesuré au moyen d'un codeur linéaire optique dont le pas de gravure est de 20  $\mu\text{m}$  (interpolé 2000 fois : résolution 10 nm).

Par ce dispositif, la lame opaque peut être déplacée sur 1 cm avec une incertitude-type<sup>1</sup> sur la connaissance de ce déplacement de 50 nm.

#### 3.4.6.2 Répétabilité de la courbe d'étalonnage

Nous avons donc utilisé le dispositif d'étalonnage afin de déplacer une lame métallique perpendiculairement au faisceau gaussien d'un capteur de position. Nous avons mesuré la puissance reçue par une photodiode ( $P$ ) placée après cette lame, tout en mesurant également une puissance de référence  $P_0$  en sortie d'une voie du *splitter*.

La lame a été déplacée par pas de 20  $\mu\text{m}$  (et par conséquent, à la même période que la gravure du codeur linéaire – annulation de l'erreur de microjustesse) sur une distance d'environ 8 mm, et la distance indiquée par le codeur linéaire a été corrigée de manière adéquate (correction de l'erreur de justesse).

Ce déplacement a été répété 20 fois pour une durée totale d'environ une heure, permettant d'obtenir 20 courbes d'étalonnage de ce capteur de position. Comme on peut le constater à la FIGURE 3.26, la superposition est très bonne, puisque les courbes sont indiscernables les unes des autres lorsqu'elles sont visualisées dans leur totalité.

Les deux cartouches de ce graphique présentent deux agrandissements qui permettent de constater que pour chacun des points de la courbe, les

1. Cette valeur d'incertitude a été déterminée en annexe B page 161.

20 points de mesure sont séparés de  $\pm 100$  nm en distance (soit un écart-type de 60 nm en considérant une distribution carrée) et de  $\pm 5 \times 10^{-4}$  en variation relative de puissance (soit un écart-type de  $3 \times 10^{-4}$ ). Ces valeurs typiques se retrouvent pour tous les autres points de la courbe.

La moyenne des 20 courbes d'étalonnage précédentes permet d'obtenir la réponse moyenne de ce capteur gaussien : nous considérerons l'incertitude sur la répétabilité de cette courbe comme égale à 60 nm.

Enfin, l'utilisation ultérieure de cette courbe d'étalonnage (nombre fini de points) nécessite une interpolation : l'incertitude-type correspondante a été évaluée à 20 nm.

### 3.4.7 Conclusion

On peut donc effectuer une somme quadratique des incertitudes impliquées lors d'une détermination de la position à l'aide d'un capteur gaussien simple faisceau de dynamique 2 mm (TABLE 3.2).

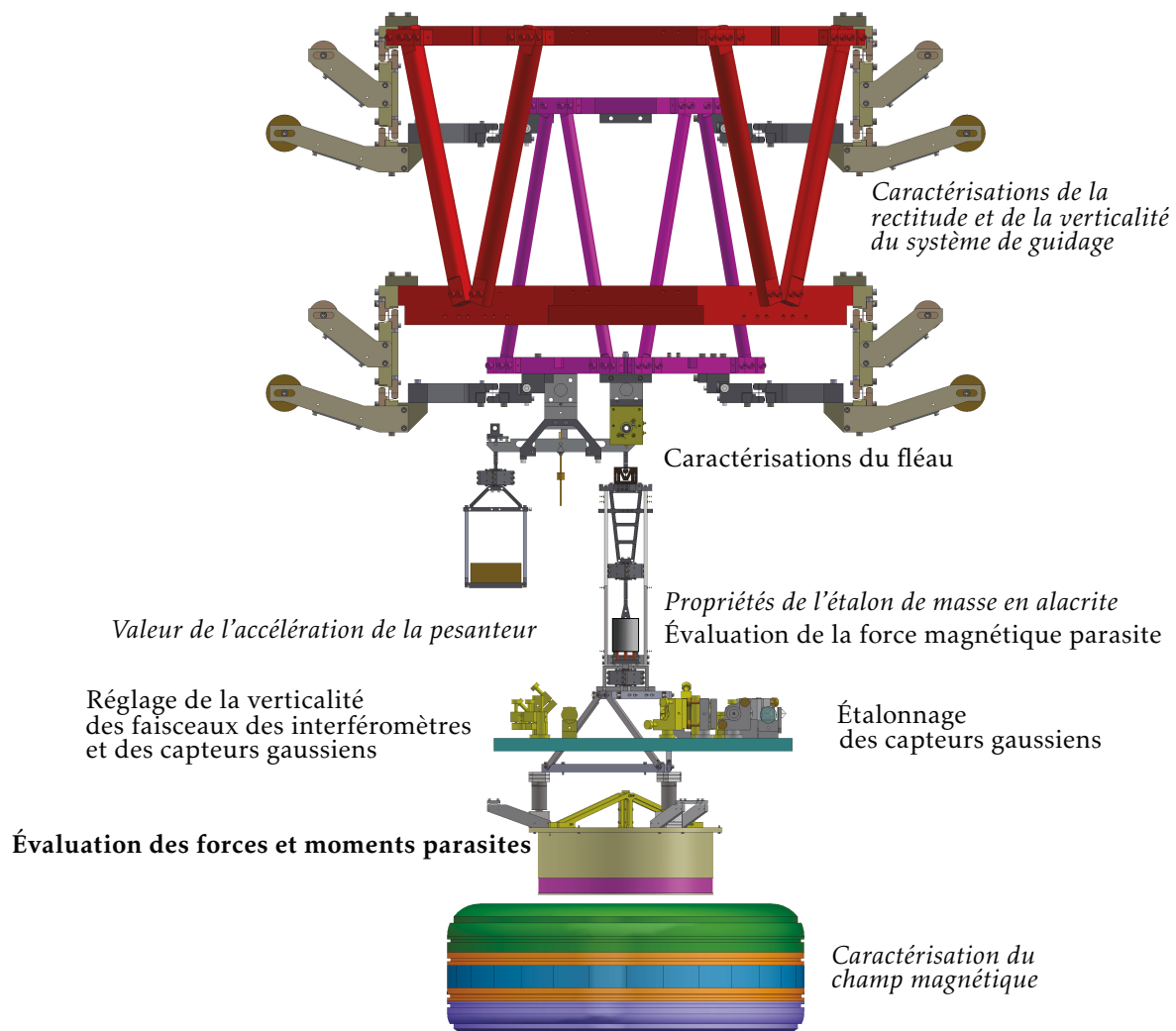
TABLE 3.2 – Composantes d'incertitude de la détermination d'une position par un capteur gaussien simple faisceau.

Composante d'incertitude	Valeur / nm
Dérive (10 nm/heure), <i>section 3.4.5.2</i>	10
Dispositif d'étalonnage, <i>section 3.4.6.1</i>	50
Répétabilité courbe étalonnage, <i>section 3.4.6.2</i>	60
Interpolation courbe étalonnage, <i>section 3.4.6.2</i>	20
Total	90

Nous pourrions désormais déterminer les positions de la bobine lors des phases statiques (durée caractéristique : une heure) avec une incertitude-type de 90 nm : ces informations serviront notamment à estimer les forces et les moments parasites (déterminés au chapitre 4), et donc l'incertitude-type liée à l'existence d'une puissance parasite  $u_r(P)$  et celle liée à la comparaison de forces  $u_r(f)$ , qui sera finalement estimée au chapitre 5.

Quant aux capteurs gaussiens qui visent à asservir le fléau lors de la pesée ou à déclencher la mesure lors de la phase dynamique, ils doivent seulement être résolus et stable. La stabilité sera assurée par le *splitter* comme expliqué précédemment, et la résolution par la diminution du diamètre du faisceau au niveau de la lame. Ainsi, la dynamique du faisceau d'asservissement du fléau a été ajustée à 40  $\mu\text{m}$ , tandis que le déclenchement de la phase dynamique est assurée à 2  $\mu\text{m}$  près.





Dans ce chapitre, nous mettons en évidence le mouvement de lacet du fléau du comparateur de forces lors des doubles pesées de la phase statique (section 4.3.1). Ce mouvement est directement mis à profit pour déterminer les forces parasites s'exerçant perpendiculairement à l'axe longitudinal du fléau (forces  $F_y$ , section 4.3.2) et pris en compte dans le modèle du double pendule (section 4.3.3). À partir de ce point, une comparaison entre les deux méthodes d'évaluation des forces  $F_y$  est effectuée (section 4.3.4). Ensuite, la position et l'inclinaison de la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique sont ajustées de manière à réduire au minimum ses mouvements (section 4.4) et donc les forces et moments parasites s'exerçant sur elle en double pesée. Finalement, nous donnons l'**évaluation des forces et moments parasites** (section 4.5) s'exerçant sur la bobine de la balance du watt lors des déterminations de la valeur de la constante de Planck décrites au chapitre suivant.

---

## Chapitre 4

# Évaluation des forces et moments parasites de la phase statique

---

### 4.1 Position du problème

Dans ce chapitre [199], nous cherchons à estimer les forces et les moments parasites impliqués dans la phase statique en utilisant deux modèles : modèle du fléau et modèle du double pendule. Les valeurs de ces grandeurs doivent être minimisées de façon à réduire, ou à rendre négligeable, leurs contributions dans la détermination de  $h$  au travers des termes d'erreur de puissance (dont l'incertitude-type relative est  $u_r(P)$ ) et d'erreur de comparaison de forces (dont l'incertitude-type relative est  $u_r(f)$ ). Pour la clarté de l'exposé de ce chapitre, les forces et moments parasites, de même que les déplacements de la bobine et du fléau seront distingués selon le type d'équilibre auxquelles ils correspondent, bien que dans les autres chapitres cette distinction n'ait pas été faite.

Ainsi, un critère de réglage de la position et de l'inclinaison de la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique est défini : il s'agit de minimiser la différence des forces et les moments parasites en limitant les déplacements de la suspension entre les deux équilibres de la phase statique. Plus les déplacements de la bobine et le lacet du fléau seront faibles entre les deux positions d'équilibre, plus les différences des forces et des moments parasites s'exerçant sur la bobine entre ces deux étapes seront faibles. L'objectif est d'estimer ces différences en phase statique (notée « stat »), depuis la position d'équilibre masse levée (notée « ml ») vers la position d'équilibre masse posée (notée « mp ») :

$$\begin{cases} \Delta F_x^{\text{stat}} = F_x^{\text{ml}} - F_x^{\text{mp}} \\ \Delta F_y^{\text{stat}} = F_y^{\text{ml}} - F_y^{\text{mp}} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta M_x^{\text{stat}} = M_x^{\text{ml}} - M_x^{\text{mp}} \\ \Delta M_y^{\text{stat}} = M_y^{\text{ml}} - M_y^{\text{mp}} \\ \Delta M_z^{\text{stat}} = M_z^{\text{ml}} - M_z^{\text{mp}} \end{cases} \quad (4.1)$$

Toutes ces différences de forces et de moments interviennent dans le terme d'erreur de puissance (équation 1.18 page 20). La différence  $\Delta F_x^{\text{stat}}$  intervient dans le terme d'erreur de comparaison de forces (équation 3.7 page 77).

En effet, le poids de la masse étalon  $m \cdot g$  est comparé à la différence des deux composantes verticales de la force de Laplace  $\Delta F_z^{\text{stat}} = F_z^{\text{ml}} - F_z^{\text{mp}}$  par le fléau lors de la phase statique (pesée par substitution, voir la section 2.1.4.3 page 46) : le courant évalué au cours de cette double pesée est la différence de deux courants  $\Delta I^{\text{stat}} = I^{\text{ml}} - I^{\text{mp}}$ . Les forces, moments et courants pertinents de la phase statique sont donc les différences correspondants aux deux équilibres<sup>1</sup>.

Après avoir brièvement décrit le dispositif expérimental, nous développerons et comparerons deux modèles d'estimation des forces, puis nous chercherons à réduire le déplacement de la bobine et le lacet du fléau entre les positions d'équilibre des deux phases de pesées. Enfin, nous évaluerons les forces et moments parasites impliqués lors des phases statiques effectuées à l'été 2014, valeurs qui seront utilisées dans le chapitre suivant pour le bilan d'incertitude de la détermination de la constante de Planck.

## 4.2 Dispositif expérimental

Le fléau est suspendu à son support par une lame mince et seul son angle sur l'horizontale est asservi en pesée par le courant circulant dans la bobine (FIGURE 2.7 page 44).

On s'intéresse aux déplacements de la bobine, de la suspension et du fléau entre les deux étapes de la pesée, c'est-à-dire les déplacements depuis la position d'équilibre masse levée vers la position d'équilibre masse posée. Ces positions nous permettront de déterminer les forces et moments parasites impliqués lors des phases statiques.

Le dispositif expérimental utilisé doit permettre de :

- Mesurer les mouvements du fléau et de la bobine lors des deux étapes de la pesée (équilibres à courant  $I^{\text{mp}}$  puis à courant  $I^{\text{ml}}$ ) de manière à obtenir les mouvements de deux segments de la suspension de bobine.
- De modifier la position et l'inclinaison de la bobine dans l'entrefer de l'aimant.

1. Dans les équations 1.18 et 3.7, ces différences sont simplement notées  $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$  et  $I$ .

### 4.2.1 Masse posée, masse levée, masses équilibrées

Le dispositif d'amenée de masse est utilisé pour réaliser les configurations « masse posée » (déséquilibre  $-250$  g) et « masse levée » (déséquilibre  $+250$  g).

Certaines mesures développées dans le reste de ce chapitre nécessitent la connaissance des positions d'équilibre de la bobine et du fléau à courant nul (position de repos). Ces positions ne peuvent être obtenues directement puisque, sans courant, le fléau n'est plus asservi : il s'incline alors jusqu'à reposer sur une butée mécanique située dans la suspension de la masse étalon. Dans ces conditions, les forces s'exerçant aux points de contacts de la butée et du fléau vont agir *a minima* sur la lame latérale du fléau et la lame centrale induisant un comportement différent de la suspension.

La position de pesée à courant nul est toutefois accessible en ne changeant que marginalement la configuration du comparateur de forces. En ôtant à la fois la masse étalon  $m$  et la masse de tare  $\frac{m}{2}$ , il est possible d'asservir le fléau à une position d'équilibre où le courant circulant est quasiment nul, position « masses équilibrées », courant  $I^0$  nominalement nul. Cette configuration ne peut être réalisée automatiquement et ne fait pas partie du protocole de la mesure de  $h$  ; elle servira néanmoins les expériences de ce chapitre : si on ne pourra l'effectuer de manière routinière lors du fonctionnement ultérieur de l'expérience, des mesures de répétabilité montrent que la présence puis l'absence successives de la masse de tare ne perturbent pas significativement le réglage de la bobine.

De cette manière, on peut obtenir la position de la bobine à un courant  $I^0$  inférieur en valeur absolue à quelques dizaines de microampères.

### 4.2.2 Détecteurs

Que ce soit pour mesurer les déplacements de la bobine ou les mouvements angulaires du fléau, nous utilisons les mêmes détecteurs que ceux précédemment décrits :

- Des capteurs gaussiens (présentés en section 2.2.3.3 page 62) et des capteurs capacitifs<sup>2</sup> permettent de suivre les déplacements du support bobine avec une résolution meilleure que  $0,1 \mu\text{m}$  et ses rotations avec une résolution meilleure que  $0,1 \mu\text{rad}$  pour une gamme de  $\pm 1$  mm et  $\pm 10$  mrad. Ils donnent donc accès à ses positions linéaires ( $x$ ,  $y$  et  $z$  le long des axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ ) et angulaires ( $\beta_x$ ,  $\beta_y$  et  $\beta_z$  autour des axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ ) (FIGURE 2.16 page 59).
- Des capteurs capacitifs disposés dans un berceau autour du fléau (section 3.3.1 page 79 et FIGURE 3.7 page 79) mesurent ses 3 degrés de liberté en rotation. Toutefois, le fléau étant asservi durant la pesée (que ce soit masse posée ou masse levée) au moyen d'un capteur placé à son

2. Dans cette expérience, nous n'utilisons pas les interféromètres, mais trois capteurs capacitifs, les interféromètres n'étant pas encore opérationnels.

extrémité (FIGURE 2.7), la seule mesure pertinente ici est la mesure de son lacet  $\phi$  autour de l'axe  $\vec{z}$ , auquel on accède avec une résolution de l'ordre de  $0,1 \mu\text{rad}$ .

### 4.2.3 Translation et inclinaison de la bobine

#### 4.2.3.1 Translation de la bobine

La translation de la suspension complète et donc de la bobine dans le plan horizontal est effectuée en déplaçant la lame flexible centrale du fléau par l'intermédiaire d'un pantographe à lames flexibles (FIGURE 4.1) inséré entre la partie mobile de la balance du watt et le fléau.

Ce pantographe permet un déplacement total de  $1,5 \text{ mm}$ , pour un incrément minimal de l'ordre de  $5 \mu\text{m}$ , mesuré à l'aide de deux palpeurs Heidenhain qui permettent un contrôle des déplacements inférieur au micromètre.

#### 4.2.3.2 Inclinaison de la bobine

L'inclinaison de la bobine est modifiée en lestant sa périphérie par des masselotes. Déposer  $1 \text{ g}$  sur le périmètre de la bobine entraîne une inclinaison d'environ  $250 \mu\text{rad}$  et un déplacement de son centre de gravité d'environ  $50 \mu\text{m}$  par rapport à sa position précédente.

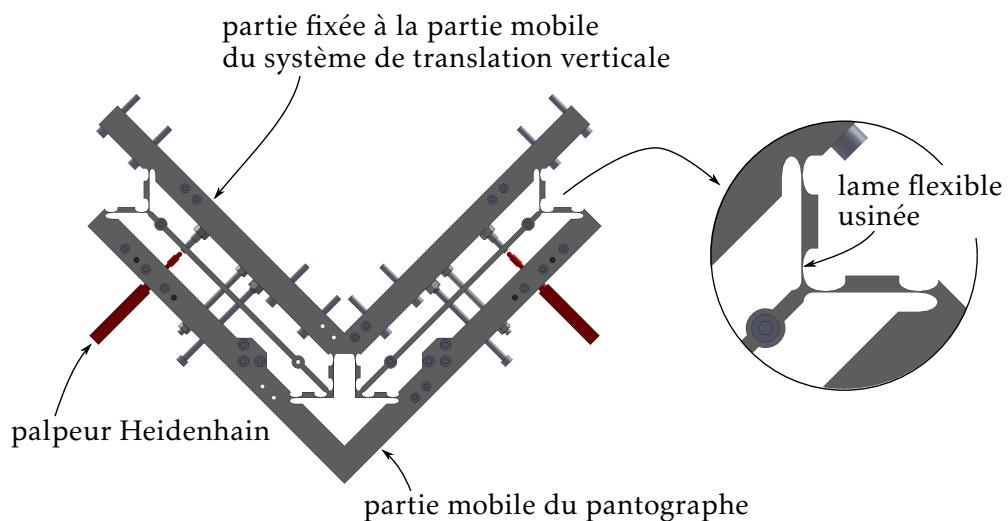


FIGURE 4.1 – Pantographe à lames flexibles destiné aux déplacements de la suspension dans le plan horizontal  $Oxy$ .

### 4.3 Analyse des comportements de la bobine et du fléau

#### 4.3.1 Mise en évidence du mouvement de lacet du fléau

Les premières doubles pesées ont montré un mouvement de lacet du fléau de plusieurs centaines de microradians (mouvement autour de l'axe vertical) entre les étapes masse posée et masse levée.

À partir d'une position quelconque de la bobine où nous avons mesuré un mouvement de lacet  $\Delta\phi^{\text{stat}}$  d'environ  $-200 \mu\text{rad}$  entre les deux positions d'équilibre de la double pesée, nous avons cherché à modifier l'inclinaison de la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique.

Une masse de 2 g a été successivement placée dans différentes positions espacées de  $45^\circ$  sur la périphérie de la bobine (cartouche de la FIGURE 4.2) afin de modifier son inclinaison par rapport au plan du circuit magnétique. Pour chaque position, repérée de 1 à 8, le lacet du fléau  $\Delta\phi^{\text{stat}}$  a été ensuite mesuré (FIGURE 4.2). La position sans lest sur la bobine décrite au paragraphe précédent est repérée par 0.

Lorsque la bobine est lestée le long de l'axe  $\vec{x}$ , qui représente l'axe longitudinal du fléau (rotation de la bobine selon l'angle mesuré  $\beta_y$ , cas 1 et 5), le mouvement de lacet est peu différent du mouvement observé lorsque la bobine n'était pas lestée.

En revanche, lorsque la bobine est lestée le long de l'axe  $\vec{y}$ , qui représente l'axe transverse du fléau (rotation de la bobine selon l'angle mesuré  $\beta_x$ , cas 3

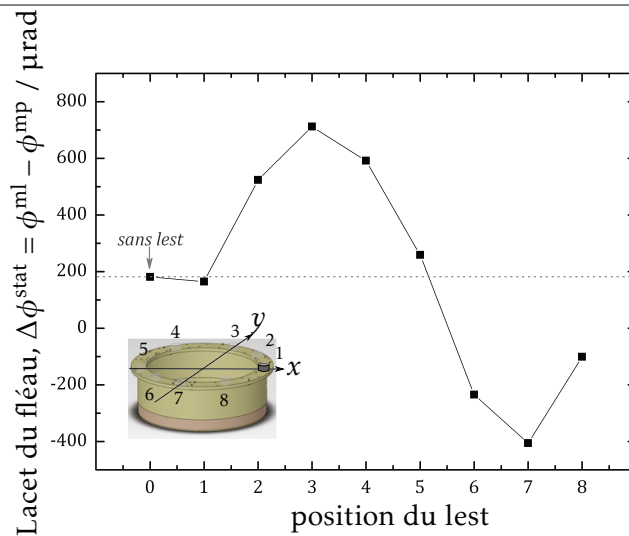


FIGURE 4.2 – Évolution du mouvement de lacet  $\Delta\phi^{\text{stat}} = \phi^{\text{ml}} - \phi^{\text{mp}}$  en fonction de la position d'un lest de 2 g sur le pourtour de la bobine.

et 7), le mouvement de lacet du fléau est alors modifié sensiblement puisque sa valeur est changée d'environ 600  $\mu\text{rad}$ .

### 4.3.2 Interprétation : modèle du fléau

#### 4.3.2.1 Principe

En considérant le fléau comme un pendule de torsion (FIGURE 4.3), on constate que son mouvement de lacet ( $\Delta\phi^{\text{stat}}$ ) entre les deux phases de la pesée est proportionnel à la différence des forces agissant perpendiculairement à son extrémité  $\Delta F_y^{\text{stat}} = F_y^{\text{ml}} - F_y^{\text{mp}}$ . Ces forces ont des valeurs liées à l'inclinaison du bobinage par rapport au plan du circuit magnétique.

La position relative du bobinage et de l'entrefer est décrite complètement par six paramètres correspondants à ses six degrés de liberté par rapport au circuit magnétique. Ces paramètres sont notés  $u$ ,  $v$  et  $w$  pour les trois translations et  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$  pour les trois rotations. La FIGURE 4.4 montre les paramètres  $v$  et  $\theta_x$ . Leurs valeurs ne sont pas mesurables directement. Les axes  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont parallèles aux axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Calculé au centre d'un bobinage constitué d'un enroulement de longueur totale  $\ell$ , parcouru par un courant  $I$  et immergé dans un champ radial<sup>3</sup> et horizontal de norme  $B$ , le torseur des forces de Laplace est égal à [171] :

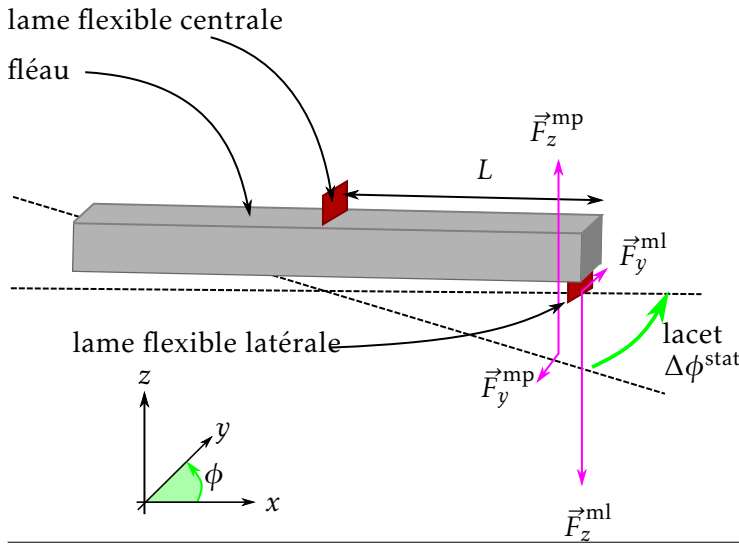


FIGURE 4.3 – Le fléau du comparateur de forces comme balance de torsion : la différence des forces horizontales  $\Delta F_y^{\text{stat}} = F_y^{\text{ml}} - F_y^{\text{mp}}$ , perpendiculaires à l'extrémité du fléau est responsable de son mouvement de lacet  $\Delta\phi^{\text{stat}} = \phi^{\text{ml}} - \phi^{\text{mp}}$  autour de la lame centrale. *Remarque* : pour la position relative exacte du point d'application des forces  $F_y$  et du pivot central, consulter la FIGURE 3.16 page 91.

3. Une composante verticale de champ magnétique existe dans l'entrefer du circuit magnétique. Elle est estimée à  $1 \times 10^{-5} \text{ T}$  : nous la négligerons.

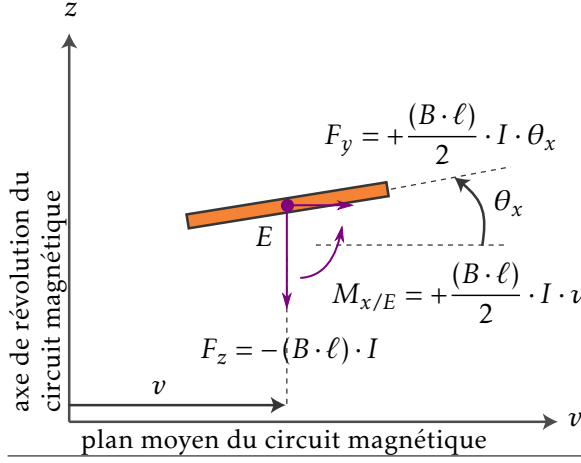


FIGURE 4.4 – Pour un courant  $I$  et un facteur  $(B \cdot \ell)$  donné, les forces et les moments parasites subis par le bobinage annulaire en son centre ne dépendent que de sa position et de son inclinaison dans l'entrefer du circuit magnétique. Position du bobinage par rapport au circuit magnétique : distance  $v$  du centre du circuit magnétique au centre de la bobine  $E$  ; inclinaison  $\theta_x$  du bobinage sur le plan moyen du circuit magnétique (confondu avec l'horizontale à  $10 \mu\text{rad}$ ).

$$\vec{F} \begin{cases} F_x = -\frac{(B \cdot \ell)}{2} \cdot I \cdot \theta_y \\ F_y = +\frac{(B \cdot \ell)}{2} \cdot I \cdot \theta_x \\ F_z = -(B \cdot \ell) \cdot I \end{cases} \quad \vec{M} \begin{cases} M_{x/E} = +\frac{(B \cdot \ell)}{2} \cdot I \cdot v \\ M_{y/E} = -\frac{(B \cdot \ell)}{2} \cdot I \cdot u \\ M_{z/E} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $u$  et  $v$  représentent la distance entre l'axe de révolution du circuit magnétique et le centre du bobinage selon les axes horizontaux ;  $\theta_x$  et  $\theta_y$  représentent le défaut de parallélisme entre l'axe de révolution du circuit magnétique et l'axe de révolution du bobinage. Ces moments sont réduits au centre géométrique  $E$  du bobinage.

Nous voyons que dans ces conditions le moment  $M_z$  est toujours nul tandis que la composante verticale de la force de Laplace est toujours indépendante des défauts de positionnement.

De plus, les normes de  $F_y$  lors des deux phases de pesée ( $F_y^{\text{mp}}$  et  $F_y^{\text{ml}}$ ), de même que leur différence ( $\Delta F_y^{\text{stat}}$ ) ne dépendent pas de l'inclinaison du bobinage autour de l'axe  $\vec{y}$  : incliner le bobinage selon l'angle  $\theta_y$  (et donc selon l'angle de la bobine  $\beta_y$  mesuré, cas 1 et 5) ne modifie pas le lacet du fléau. En revanche, les normes de  $F_y^{\text{mp}}$  et  $F_y^{\text{ml}}$  (et donc celle de  $\Delta F_y^{\text{stat}}$ ) dépendent de l'inclinaison de la bobine autour de l'axe  $\vec{x}$  : incliner le bobinage selon l'angle  $\theta_x$  (et donc selon l'angle de la bobine  $\beta_x$  mesuré, cas 7 et 3) modifie le lacet du fléau.

Nous cherchons à établir une relation entre les composantes des forces horizontales  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  lors des deux pesées et le mouvement de lacet du fléau résultant  $\Delta \phi^{\text{stat}}$ .

On peut expliquer la rotation du fléau autour de la lame centrale par l'application à son extrémité (au niveau de la lame latérale) de forces  $F_y$



parasites (forces horizontales et perpendiculaires à l'axe longitudinal du fléau). On peut alors en déduire, à partir de l'égalité des moments, que :

$$\begin{cases} (\phi^{\text{mp}} - \phi^0) \cdot K = L \cdot F_y^{\text{mp}} \\ (\phi^{\text{ml}} - \phi^0) \cdot K = L \cdot F_y^{\text{ml}} \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $K$  est la raideur angulaire en torsion de la lame centrale,  $L$  est la longueur entre les deux lames flexibles du fléau (centrale et latérale), et  $\phi^0$  l'angle du fléau lors d'un équilibre à courant nul.

La position à courant nul n'étant pas matérialisée, on ne mesure donc pas l'angle  $\phi^0$ . La combinaison des deux équations précédentes permet toutefois de s'affranchir de la connaissance de cette grandeur :

$$(\phi^{\text{ml}} - \phi^{\text{mp}}) \cdot K = L \cdot (F_y^{\text{ml}} - F_y^{\text{mp}}), \quad (4.4)$$

$$\Delta F_y^{\text{stat}} = \frac{K}{L} \cdot \Delta \phi^{\text{stat}}. \quad (4.5)$$

Cette relation montre que l'obtention d'un mouvement de lacet nul ( $\Delta \phi^{\text{stat}} = 0$ ) entre les deux phases de pesée signifie que les forces  $F_y^{\text{mp}}$  et  $F_y^{\text{ml}}$  sont égales et donc que leur différence  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  est nulle : la procédure de réglage de la bobine devra donc tenir compte de ce fait.

Si le mouvement de lacet est non nul, la connaissance de  $\frac{K}{L}$  permet de déterminer les forces  $\Delta F_y^{\text{stat}} = F_y^{\text{ml}} - F_y^{\text{mp}}$  impliquées dans la double pesée.

La raideur angulaire de la lame centrale  $K$  est inconnue, nous allons la déterminer en nous intéressant à l'origine physique des forces  $F_y$ . Ces forces sont liées à la position de la bobine par rapport au circuit magnétique (équations 4.2) :

$$\begin{cases} F_y^{\text{mp}} = +\frac{(B \cdot \ell)}{2} \cdot I^{\text{mp}} \cdot \theta_x^{\text{mp}} \\ F_y^{\text{ml}} = +\frac{(B \cdot \ell)}{2} \cdot I^{\text{ml}} \cdot \theta_x^{\text{ml}} \end{cases} \quad (4.6)$$

où les  $\theta_x$  représentent l'inclinaison du plan magnétique de la bobine par rapport à celui du circuit magnétique.

Par ailleurs, les doubles pesées sont effectuées de telle manière que les valeurs absolues des courants en masse posée et en masse levée soient égales (au défaut de masse près, voir la section 2.1.4.3 page 46). On pose  $\Delta I^{\text{stat}} = 2 \cdot I^{\text{ml}} = -2 \cdot I^{\text{mp}}$ , ce qui conduit à :

$$\begin{cases} F_y^{\text{mp}} = -\frac{(B \cdot \ell)}{2} \cdot \frac{\Delta I^{\text{stat}}}{2} \cdot \theta_x^{\text{mp}} \\ F_y^{\text{ml}} = +\frac{(B \cdot \ell)}{2} \cdot \frac{\Delta I^{\text{stat}}}{2} \cdot \theta_x^{\text{ml}} \end{cases} \quad (4.7)$$

Enfin, la double pesée conduit à l'égalité  $(B \cdot \ell) \cdot \Delta I^{\text{stat}} = m \cdot g$ . Finalement :

$$\begin{cases} F_y^{\text{mp}} = -\frac{m \cdot g}{4} \cdot \theta_x^{\text{mp}} \\ F_y^{\text{ml}} = +\frac{m \cdot g}{4} \cdot \theta_x^{\text{ml}} \end{cases} \quad (4.8)$$

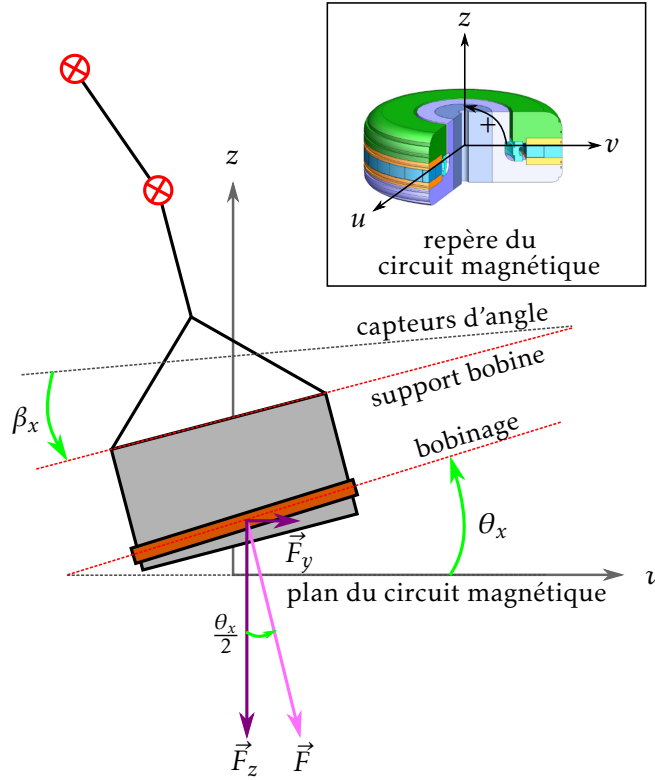


FIGURE 4.5 – L'inclinaison  $\theta_x$  du plan de la bobine sur le plan du circuit magnétique est à l'origine des forces horizontales  $F_y^{\text{mp}} = -\frac{m \cdot g}{4} \cdot \theta_x^{\text{mp}}$  et  $F_y^{\text{ml}} = +\frac{m \cdot g}{4} \cdot \theta_x^{\text{ml}}$  (double pesée de la masse  $m$ , courants égaux en valeur absolue). L'angle accessible expérimentalement est l'angle  $\beta_x$ , fonction de la position relative du plan des capteurs d'angle et du support bobine.

Dans ces équations, les angles  $\theta_x$  (qui représentent l'inclinaison du plan magnétique de la bobine par rapport à celui du circuit magnétique) ne sont pas directement accessibles par la mesure. En pratique, on mesure les angles  $\beta_x$  entre le plan défini par les capteurs d'angles (capteurs capacitifs, à terme interféromètres) et la face supérieure du support bobine (FIGURE 4.5). Les relations précédentes peuvent alors s'écrire :

$$\begin{cases} F_y^{\text{mp}} = -\frac{m \cdot g}{4} \cdot (\beta_x^{\text{mp}} + \beta_x^{\text{off}}) \\ F_y^{\text{ml}} = +\frac{m \cdot g}{4} \cdot (\beta_x^{\text{ml}} + \beta_x^{\text{off}}), \end{cases} \quad (4.9)$$

où  $\beta_x^{\text{off}}$  est l'*offset* angulaire défini par la différence entre l'angle inconnu  $\theta_x$  (la position angulaire du bobinage par rapport au circuit magnétique) et l'angle mesuré  $\beta_x$  (la position angulaire du support bobine par rapport aux capteurs de position).

La différence de forces entre les deux pesées s'exprime donc par :

$$\Delta F_y^{\text{stat}} = \frac{m \cdot g}{4} \cdot (\beta_x^{\text{mp}} + \beta_x^{\text{ml}} + 2 \cdot \beta_x^{\text{off}}) \quad (4.10)$$

Finalement, en combinant l'équation 4.5 (qui exprime l'équilibre du fléau sous la forme d'une égalité de moments) et l'équation 4.10 (qui explicite l'origine physique des forces s'exerçant à l'extrémité du fléau), on obtient :

$$\Delta \phi^{\text{stat}} = \frac{L}{K} \cdot \frac{m \cdot g}{4} \cdot (\beta_x^{\text{mp}} + \beta_x^{\text{ml}} + 2 \cdot \beta_x^{\text{off}}). \quad (4.11)$$

Le mouvement de lacet du fléau  $\Delta \phi^{\text{stat}}$  lors d'une double pesée est donc proportionnel à la somme des angles  $\beta_x$  mesurés : un ajustement linéaire permettra à partir de plusieurs points de données d'obtenir  $K$  et  $\beta_x^{\text{off}}$ , puisque les grandeurs  $m$  (valeur de la masse étalon),  $L$  (longueur du fléau) et  $g$  (accélération de la pesanteur) sont connues. Ensuite,

- La connaissance de  $K$  permettra de déterminer les forces  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  à partir du mouvement de lacet du fléau  $\Delta \phi^{\text{stat}}$  (par la relation 4.5) ;
- La connaissance de  $\beta_x^{\text{off}}$  permettra de déterminer les forces  $F_y^{\text{mp}}$  et  $F_y^{\text{ml}}$  à partir des angles mesurés d'équilibre de la bobine  $\beta_x^{\text{mp}}$  et  $\beta_x^{\text{ml}}$  (par les relations 4.9).

#### 4.3.2.2 Détermination des paramètres numériques

**a. Protocole expérimental** Nous avons mesuré et enregistré la position de la bobine selon ses 6 degrés de liberté ( $x$ ,  $y$ ,  $z$  ainsi que  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  et  $\beta_z$ ) et celle du fléau selon ses 3 degrés de liberté angulaire (tangage  $\psi$ , roulis  $\varphi$ , lacet  $\phi$ ). Néanmoins, nous n'avons utilisé ici que les mesures nécessaires à la comparaison des forces  $F_y$  ; soit la position  $y$  du support bobine, sa position angulaire mesurée  $\beta_x$  et la position de lacet du fléau  $\phi$ .

Un lest de 670 mg est disposé sur le pourtour de la bobine, successivement tous les  $45^\circ$  (positions repérées de 1 à 8 : on utilise les mêmes repères de position qu'à la FIGURE 4.2), de manière à modifier l'inclinaison de la bobine, et donc  $\beta_x$  et  $F_y$ .

Chaque configuration de la bobine (position différente d'un lest sur son pourtour) a donné lieu à la matérialisation de deux équilibres et donc à deux mesures de positions d'équilibre. Chacune de ces configurations est donc composée de la position de la bobine et du fléau lorsque le fléau est asservi en position masse posée, et lorsqu'il est asservi en position masse levée.

Une configuration supplémentaire (repérée par l'indice 0) a été mesurée, de manière à effectuer une mesure sans lest (en l'occurrence proche d'un état de réglage de la bobine satisfaisant). Les positions lestées et non lestées induisent les mêmes courants de pesée, car on a enlevé ou ajouté côté tare un lest de même valeur nominale que le lest disposé sur le pourtour de la bobine.

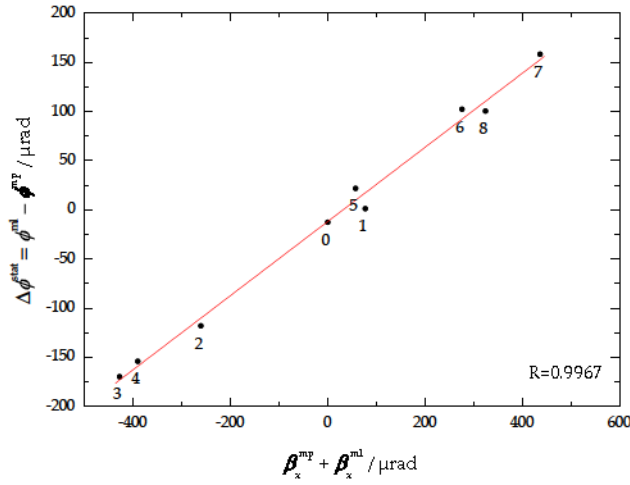


FIGURE 4.6 – Mouvement de lacet du fléau ( $\Delta\phi^{\text{stat}} = \phi^{\text{mp}} - \phi^{\text{ml}}$ ) en fonction de la somme des angles mesurés de la bobine ( $\beta_x^{\text{mp}} + \beta_x^{\text{ml}}$ ) en double pesée, lorsqu'un lest de 670 mg est déplacé sur le pourtour de la bobine.

Par ailleurs, il serait tout à fait possible de procéder à cette expérience sans connaître la masse du lest ajouté. Aucune hypothèse n'est faite sur cette masse pour l'évaluation des forces : ce lest incline le plan magnétique de la bobine (et incidemment la déplace également par rapport au plan magnétique de l'aimant), c'est ce mouvement qui est mesuré.

**b. Détermination des paramètres numériques** Les incertitudes sur les mesures des positions ( $x, y$ ), des angles ( $\beta_x, \beta_y$ ) et du lacet du fléau ( $\phi$ ) sont évaluées respectivement à  $0,3 \mu\text{m}$ ,  $0,4 \mu\text{rad}$  et  $2 \mu\text{rad}$  (section 4.4.1.3). Par conséquent, l'incertitude-type sur la détermination du mouvement de lacet du fléau peut être estimée à  $u(\Delta\phi) = 2 \cdot \sqrt{2} = 3 \mu\text{rad}$ , et celle sur la détermination du mouvement angulaire à  $u(\Delta\beta) = 0,4 \cdot \sqrt{2} = 0,6 \mu\text{rad}$ .

En accord avec l'équation 4.11, le tracé de  $\Delta\phi^{\text{stat}} = \phi^{\text{mp}} - \phi^{\text{ml}}$  en fonction de  $\beta_x^{\text{mp}} + \beta_x^{\text{ml}}$  s'apparente à une droite d'équation  $\Delta\phi^{\text{stat}} = a + b \cdot (\beta_x^{\text{mp}} + \beta_x^{\text{ml}})$ . Cette droite, ainsi que les données expérimentales, est représentée à la FIGURE 4.6. Les incertitudes associées, trop faibles pour être visibles à cette échelle, ne sont pas indiquées.

Les paramètres  $a$  et  $b$ , ainsi que leurs incertitudes-types associées [200], valent :

$$a = (-12 \pm 4) \mu\text{rad}, \quad (4.12)$$

$$b = (0,377 \pm 0,012) \mu\text{rad}/\mu\text{rad}, \quad (4.13)$$

dont on déduit<sup>4</sup> les valeurs de constante de raideur de torsion  $K$  et d'*offset* angulaire  $\beta_x^{\text{off}}$  de l'équation 4.11 (les valeurs d'incertitudes données sont établies par propagation des incertitudes des valeurs  $a$  et  $b$ ):

$$K = \frac{L \cdot m \cdot g}{4 \cdot b} = (0,325 \pm 0,011) \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}, \quad (4.14)$$

$$\beta_x^{\text{off}} = \frac{2 \cdot a \cdot K}{L \cdot m \cdot g} = (16 \pm 6) \text{ } \mu\text{rad}. \quad (4.15)$$

Alors, l'expression numérique de l'équation 4.5 est :

$$\Delta F_y^{\text{stat}} = 3,25 \cdot \Delta \phi^{\text{stat}}, \quad (4.16)$$

tandis que celles des équations 4.10 sont :

$$\begin{cases} F_y^{\text{mp}} = -1,23 \cdot (\beta_x^{\text{mp}} + 16) \\ F_y^{\text{ml}} = +1,23 \cdot (\beta_x^{\text{ml}} + 16) \end{cases} \quad (4.17)$$

**c. Incertitudes** Les écarts à la linéarité observés à la FIGURE 4.6 représentent soit les imperfections du modèle, soit les limites des mesures d'angle : elle sont donc utilisées pour évaluer les incertitudes sur l'estimation des forces. Ces incertitudes s'expriment dans les valeurs des grandeurs  $K$  et  $\beta_x^{\text{off}}$ .

Les différences de forces  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  sont évaluées à l'aide de la relation suivante :

$$\Delta F_y^{\text{stat}} = \frac{K}{L} \cdot \Delta \phi^{\text{stat}}, \quad (4.18)$$

en négligeant la contribution de  $L$ , l'incertitude-type correspondante est :

$$u(\Delta F_y^{\text{stat}}) = \frac{1}{L} \sqrt{K^2 \cdot u(\Delta \phi^{\text{stat}})^2 + (\Delta \phi^{\text{stat}})^2 \cdot u(K)^2}. \quad (4.19)$$

Cette valeur dépend de la valeur du lacet du fléau  $\Delta \phi^{\text{stat}}$  et est comprise entre 10  $\mu\text{N}$  et 20  $\mu\text{N}$  pour les expériences de cette section. On retiendra :

$$u(\Delta F_y^{\text{stat}}) = 20 \text{ } \mu\text{N}. \quad (4.20)$$

On évalue l'incertitude-type de l'estimation des forces  $F_y^{\text{mp}}$  et  $F_y^{\text{ml}}$  selon le même principe :

$$u(F_y^{\text{mp}}) = u(F_y^{\text{ml}}) = 10 \text{ } \mu\text{N}. \quad (4.21)$$

---

4. La valeur de  $K$  est sensiblement égale à celle déterminée en [199] lors d'une autre expérience : cette grandeur est en effet liée aux propriétés physiques de la lame centrale qui n'a pas été modifiée depuis la première application de cette méthode. En revanche, l'*offset* des capteurs angulaires  $\beta_x^{\text{off}}$  est liée à la position relative des capteurs par rapport à la bobine et au choix fait de l'origine des angles. Si l'*offset* est bien plus faible dans cette détermination que dans la précédente, c'est que nous avons cette fois-ci choisi comme origine des angles la position à courant nul de la bobine qui est en l'occurrence très proche d'un état de réglage satisfaisant, et donc avec un plan du bobinage pratiquement parallèle à celui du circuit magnétique.

### 4.3.3 Adaptation du modèle du double pendule au mouvement de lacet du fléau

#### 4.3.3.1 Principe

La balance du watt du LNE a été conçue de telle sorte que les contributions des forces et des moments parasites s'exerçant sur la bobine lors de la phase statique puissent être estimées. Pour cela, il convient d'utiliser une suspension multi-brins dont les segments rigides sont reliés par des cardans à lames flexibles. Cette suspension bien définie donne le nombre de degrés de liberté nécessaire à l'estimation des forces ( $F_x$  et  $F_y$ ) et des moments parasites ( $M_x$  et  $M_y$ ).

Le modèle décrit dans cette section, a été proposé par F. Villar au LNE [161, 171] en ignorant alors le mouvement de lacet du fléau. Il repose sur le fait que la déviation angulaire du segment 1 de la suspension (FIGURE 4.7) varie avec les forces parasites s'exerçant sur la bobine, alors que la déviation angulaire du segment 2 de la suspension varie avec les forces et les moments parasites s'exerçant sur la bobine. Il est possible d'accéder aux forces ( $F_x^{\text{mp}}$ ,  $F_y^{\text{mp}}$  et  $F_x^{\text{ml}}$ ,  $F_y^{\text{ml}}$ ) et moments parasites ( $M_x^{\text{mp}}$ ,  $M_y^{\text{mp}}$  et  $M_x^{\text{ml}}$ ,  $M_y^{\text{ml}}$ ) s'exerçant sur la bobine en mesurant de façon directe les déviations angulaires des deux segments de la suspension (depuis la position d'équilibre de la bobine à courant nul vers la position d'équilibre de la bobine lorsqu'elle est alimentée par un courant  $I^{\text{mp}}$  ou  $I^{\text{ml}}$ ). Il est également possible de procéder de manière indirecte en mesurant les déplacements de la bobine, ses déviations angulaires et le lacet du fléau.

Quelques hypothèses (annexe C.1) permettent de réduire la suspension de bobine de la balance du watt à celle présentée à la FIGURE 4.7 pour le plan  $Oyz$ . Les segments 1 et 2, caractérisés par des masses  $m_1$  et  $m_2$  et par des longueurs  $l_1$  et  $l_2$  sont reliés par un cardan. Leurs centres de masse, respectivement  $G_1$  et  $G_2$ , sont situés à des distances  $l_{1G}$  et  $l_{2G}$  des points centraux des cardans  $O_1$  et  $O_2$ .

Les capteurs de position précédemment décrits (capteurs gaussiens et capteurs capacitifs) permettent de mesurer le mouvement d'un point fictif  $\lambda$  du segment 2 ainsi que le mouvement angulaire de ce segment. Ce point  $\lambda$  est situé au barycentre du triangle formé par les axes des trois faisceaux lasers des capteurs gaussiens. Il est donc situé dans le plan défini par les 3 lames opaques, et non pas dans le plan de la bobine. C'est la longueur du centre du cardan  $O_2$  au plan défini par les 3 lames opaques que nous désignons par  $l_2$ .

La composante verticale de la force de Laplace  $F_z$  est connue puisque c'est elle qui équilibre le défaut ou l'excès de masse du fléau : sa norme est  $\frac{m \cdot g}{2}$ . Le vecteur  $\vec{F}_z$  est ascendant à l'équilibre masse posée, et descendant à l'équilibre masse levée.

Les valeurs numériques de tous ces paramètres sont répertoriées dans la TABLE C.1 page 168, de même que l'accélération ( $\vec{g} = g \cdot \vec{e}_z$ ) de la pesanteur.

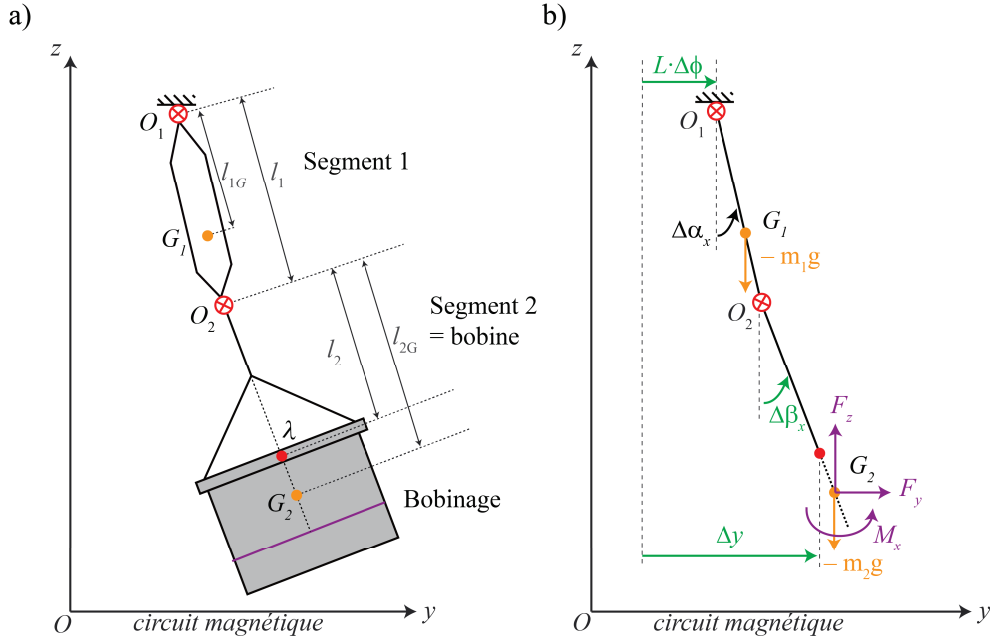


FIGURE 4.7 – Schéma de la suspension dans le plan  $Oyz$  (a) Schéma de la suspension avec ses longueurs  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_{1G}$ ,  $l_{2G}$ , ses centres de masse  $G_1$  et  $G_2$ , son centre optique  $\lambda$  et ses cardans  $O_1$  et  $O_2$ . (b) Force  $F_y$  et moment  $M_x$  réduits au centre de masse  $G_2$ , poids ( $m_1 \cdot g$  et  $m_2 \cdot g$ ) agissant sur chacun des deux segments. Quantités mesurées du déplacement de la bobine  $\Delta y$  et  $\Delta\beta_x$  du segment 2 le long de l'axe  $y$  et du lacet du fléau  $\Delta\phi$  (de la position d'équilibre à courant nul vers la position d'équilibre à courant  $I$ ).

Enfin,  $F_y$  et  $M_x$  sont la force horizontale et le moment (réduit au centre de masse  $G_2$  du segment 2) dont les valeurs sont recherchées dans le plan  $Oyz$ .

Sous l'effet des différentes forces et moments, les deux segments s'inclinent, lorsque la bobine est parcourue par un courant  $I$ , d'un angle  $(\Delta\alpha_x, \Delta\alpha_y)$  et  $(\Delta\beta_x, \text{ et } \Delta\beta_y)$  par rapport à leur position de repos (équilibre à courant nul). Les déviations angulaires  $(\Delta\alpha_x, \Delta\alpha_y)$  du premier segment de la suspension ne sont pas mesurées. On les détermine à partir des déplacements de la bobine ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ), des déviations angulaires du segment 2 ( $\Delta\beta_x$ , et  $\Delta\beta_y$ ) et du mouvement de lacet du fléau ( $\Delta\phi$ ).

Les calculs sont détaillés dans l'annexe C.2.

#### 4.3.3.2 Calcul des paramètres numériques

**a. Paramètres numériques** Les forces et moments parasites  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M_x$  et  $M_y$  s'exerçant au centre de masse du support bobine peuvent alors être calculés à partir du déplacement de la bobine et du lacet du fléau par rapport à leur position de repos.

Les équations C.18 s'évaluent alors pour l'étape masse levée<sup>5</sup>, où  $F_z$  vaut environ  $-2,45$  N (et le courant  $I^{\text{ml}} +4,57$  mA) :

$$\begin{aligned} \text{masse levée} \\ (F_z^{\text{ml}} \simeq -2,45 \text{ N}) \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} F_x^{\text{ml}} = +95,0 \cdot \Delta x^{\text{ml}} + 18,0 \cdot \Delta \beta_y^{\text{ml}} \\ F_y^{\text{ml}} = +95,0 \cdot \Delta y^{\text{ml}} - 18,0 \cdot \Delta \beta_x^{\text{ml}} - 9,5 \cdot \Delta \phi^{\text{ml}} \\ M_x^{\text{ml}} = -21,0 \cdot \Delta y^{\text{ml}} + 10,0 \cdot \Delta \beta_x^{\text{ml}} + 2,1 \cdot \Delta \phi^{\text{ml}} \\ M_y^{\text{ml}} = +21,0 \cdot \Delta x^{\text{ml}} + 10,0 \cdot \Delta \beta_y^{\text{ml}} \end{cases} \quad (4.22)$$

Quant à l'évaluation pour l'étape masse posée, où  $F_z$  vaut environ  $+2,45$  N (et le courant  $I^{\text{ml}} -4,57$  mA), elle conduit à :

$$\begin{aligned} \text{masse posée} \\ (F_z^{\text{mp}} \simeq +2,45 \text{ N}) \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} F_x^{\text{mp}} = +79,2 \cdot \Delta x^{\text{mp}} + 15,0 \cdot \Delta \beta_y^{\text{mp}} \\ F_y^{\text{mp}} = +79,2 \cdot \Delta y^{\text{mp}} - 15,0 \cdot \Delta \beta_x^{\text{mp}} - 7,9 \cdot \Delta \phi^{\text{mp}} \\ M_x^{\text{mp}} = -17,5 \cdot \Delta y^{\text{mp}} + 8,3 \cdot \Delta \beta_x^{\text{mp}} + 1,8 \cdot \Delta \phi^{\text{mp}} \\ M_y^{\text{mp}} = +17,5 \cdot \Delta x^{\text{mp}} + 8,3 \cdot \Delta \beta_y^{\text{mp}} \end{cases} \quad (4.23)$$

Les coefficients de sensibilité des forces et moments parasites aux mouvements de la bobine sont différents d'environ 15 % entre masse posée et masse levée, c'est pourquoi il sera nécessaire d'accéder à la position à courant nul (bobine au repos, configuration « masses équilibrées ») pour l'évaluation des forces et moments parasites.

Les déplacements de la bobine et du fléau sont comptés à partir de la position d'équilibre à courant nul qui n'est pas matérialisée de manière routinière. Par conséquent, pour accéder aux forces et moments parasites de la phase statique ( $\Delta F_x^{\text{stat}}$ ,  $\Delta F_y^{\text{stat}}$ ,  $\Delta M_x^{\text{stat}}$ ,  $\Delta M_y^{\text{stat}}$ ) on devra procéder de la manière suivante :

1. En mesurant le déplacement de la bobine et du fléau de la position d'équilibre à courant nul (masses équilibrées) jusqu'à la position d'équilibre à courant masse levée ( $I^{\text{ml}}$ ), on aura accès aux forces et moments parasites (équations 4.22) s'exerçant sur la bobine lors de la pesée masse levée :  $F_x^{\text{ml}}$ ,  $F_y^{\text{ml}}$ ,  $M_x^{\text{ml}}$  et  $M_y^{\text{ml}}$ .
2. En mesurant le déplacement de la bobine et du fléau de la position d'équilibre à courant nul (masses équilibrées) jusqu'à la position d'équilibre à courant masse posée ( $I^{\text{mp}}$ ), on obtiendra les forces et moments parasites (équations 4.23) s'exerçant sur la bobine lors de la pesée masse posée :  $F_x^{\text{mp}}$ ,  $F_y^{\text{mp}}$ ,  $M_x^{\text{mp}}$  et  $M_y^{\text{mp}}$ .

5. On note  $\Delta x^{\text{ml}}$  pour  $x^{\text{ml}} - x^0$ , autrement dit le déplacement de la bobine depuis sa position d'équilibre à courant nul vers sa position d'équilibre à courant  $I^{\text{ml}}$ . Les autres coordonnées sont notées de la même manière. On procède de façon similaire pour le déplacement « masse posée ».



3. Et enfin, on calculera la différence des forces et moments parasites s'exerçant sur la bobine de la masse levée à la masse posée :  $\Delta F_x^{\text{stat}}$ ,  $\Delta F_y^{\text{stat}}$ ,  $\Delta M_x^{\text{stat}}$  et  $\Delta M_y^{\text{stat}}$  en effectuant la différence des valeurs obtenues précédemment.

**b. Incertitudes** Les évaluations par la méthode de Monte Carlo des incertitudes dues à la connaissance des paramètres géométriques de la suspension montrent que celles-ci sont négligeables en regard des incertitudes liées à la détermination de la position de la bobine et du fléau.

Les incertitudes-types de la détermination de la mesure des positions ( $x$ ,  $y$ ), des angles ( $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ) et du lacet du fléau ( $\phi$ ) ont été évaluées respectivement à 0,3  $\mu\text{m}$ , 0,4  $\mu\text{rad}$  et 2  $\mu\text{rad}$  (section 4.4.1.3). On propage ces incertitudes dans les équations 4.22 et 4.23 pour attribuer aux déterminations des forces (respectivement des moments) en masse posée ou en masse levée la valeur de 30  $\mu\text{N}$  (respectivement 10  $\mu\text{N} \cdot \text{m}$ ). L'incertitude sur la différence des forces et des moments parasites en double pesée est donc :

$$\begin{cases} u(\Delta F_x) = u(\Delta F_y) = 50 \mu\text{N} \\ u(\Delta M_x) = u(\Delta M_y) = 15 \mu\text{N} \cdot \text{m} \end{cases} \quad (4.24)$$

En particulier, pour ce qui intéresse la section suivante, la valeur retenue de l'incertitude pour les forces  $F_y^{\text{mp}}$  et  $F_y^{\text{ml}}$  sera  $u(F_y^{\text{mp}}) = u(F_y^{\text{ml}}) = 30 \mu\text{N}$  et pour les différence de force  $u(\Delta F_y^{\text{stat}}) = 50 \mu\text{N}$ .

#### 4.3.4 Comparaison des deux modèles

Un modèle a été développé pour déterminer les forces  $F_y^{\text{mp}}$ ,  $F_y^{\text{ml}}$  et  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  à partir du mouvement de lacet du fléau ( $\Delta\phi^{\text{stat}}$ ) en double pesée et de la quantité  $\beta_x^{\text{mp}} + \beta_x^{\text{ml}}$  : le modèle du fléau.

Un modèle a été adapté pour déterminer les forces  $F_x^{\text{mp}}$ ,  $F_x^{\text{ml}}$ ,  $\Delta F_x^{\text{stat}}$ ,  $F_y^{\text{mp}}$ ,  $F_y^{\text{ml}}$  et  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  et les moments  $M_x^{\text{mp}}$ ,  $M_x^{\text{ml}}$ ,  $\Delta M_x^{\text{stat}}$ ,  $M_y^{\text{mp}}$ ,  $M_y^{\text{ml}}$  et  $\Delta M_y^{\text{stat}}$  à partir des déplacements horizontaux de la bobine ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ), de ses inclinaisons ( $\Delta\beta_x$ ,  $\Delta\beta_y$ ) et du mouvement de lacet du fléau ( $\Delta\phi$ ) : le modèle du double pendule.

Si le premier modèle ne donne accès qu'aux forces parasites horizontales et perpendiculaires à l'axe longitudinal du fléau, le second permet d'évaluer toutes les forces et moments<sup>6</sup> qui interviennent dans le terme d'erreur de puissance et d'erreur de comparaison de forces.

L'objectif de cette section est de comparer l'évaluation des forces  $F_y$  effectuées par les deux modèles décrits plus haut.

---

6. À l'exclusion de  $M_z$ .

#### 4.3.4.1 Protocole expérimental

Les mesures décrites au paragraphe a de la section 4.3.2.2 (avec 9 configurations expérimentales différentes) étaient en réalité composées des positions d'équilibre de la bobine et du lacet du fléau lors des pesées masse levée et masse posée mais aussi de la position d'équilibre de la bobine et du lacet du fléau lors des équilibres à courant nul (« masses équilibrées », section 4.2.1).

Les expériences nécessaires à l'acquisition des données pour l'évaluation – par les deux méthodes – des forces  $F_y$  ont donc été effectuées précédemment.

Le modèle du fléau permet l'évaluation des forces  $F_y$  à partir de l'inclinaison mesurée de la bobine lors des deux équilibres masse posée et masse levée ( $\beta_x^{\text{mp}}$  et  $\beta_x^{\text{ml}}$ ) et du mouvement de lacet du fléau depuis la position masse levée vers la position masse posée ( $\Delta\phi^{\text{stat}}$ ).

Le modèle du double pendule permet quant à lui l'évaluation des forces  $F_y$  à partir des déplacements de la bobine ( $\Delta y^{\text{mp}}$  et  $\Delta y^{\text{ml}}$ ;  $\Delta\beta_x^{\text{mp}}$  et  $\Delta\beta_x^{\text{ml}}$ ) et des lacets du fléau ( $\Delta\phi^{\text{mp}}$  et  $\Delta\phi^{\text{ml}}$ ) depuis la position d'équilibre à courant nul vers la position d'équilibre en masse posée et en masse levée.

Nous rappelons dans la TABLE 4.1 les expressions de ces évaluations de forces.

TABLE 4.1 – Expression des forces  $F_y^{\text{mp}}$ ,  $F_y^{\text{ml}}$  et  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  par le modèle du fléau et le modèle du double pendule.

	Modèle du fléau	Modèle du double pendule
$F_y^{\text{mp}}$	$-1,23 \cdot (\beta_x^{\text{mp}} + 16)$	$+79,2 \cdot \Delta y^{\text{mp}} - 15,1 \cdot \Delta\beta_x^{\text{mp}} - 7,9 \cdot \Delta\phi^{\text{mp}}$
$F_y^{\text{ml}}$	$+1,23 \cdot (\beta_x^{\text{ml}} + 16)$	$+95,0 \cdot \Delta y^{\text{ml}} - 18,1 \cdot \Delta\beta_x^{\text{ml}} - 9,5 \cdot \Delta\phi^{\text{ml}}$
$\Delta F_y^{\text{stat}}$	$3,25 \cdot \Delta\phi^{\text{stat}}$	$F_y^{\text{ml}} - F_y^{\text{mp}}$

#### 4.3.4.2 Comparaison

Nous pouvons à présent procéder à la comparaison des évaluations effectuées par la méthode du double pendule et la méthode du fléau pour les neuf configurations de lest et pour :

- Les forces à l'équilibre masse posée  $F_y^{\text{mp}}$  à la FIGURE 4.8(a) ;
- Les forces à l'équilibre masse levée  $F_y^{\text{ml}}$  à la FIGURE 4.8(b) ;
- Et les forces de la double pesée  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  à la FIGURE 4.9.

Les évaluations par les deux méthodes sont très similaires pour les trois quantités mesurées. Un décalage constant est toutefois présent dans toutes ces évaluations : une moyenne d'environ 100  $\mu\text{N}$  sépare les évaluations des forces  $F_y^{\text{mp}}$  et  $F_y^{\text{ml}}$  tandis que les évaluations de  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  diffèrent de 200  $\mu\text{N}$ . L'écart-type de cette différence est en revanche de seulement 40  $\mu\text{N}$ , inférieur

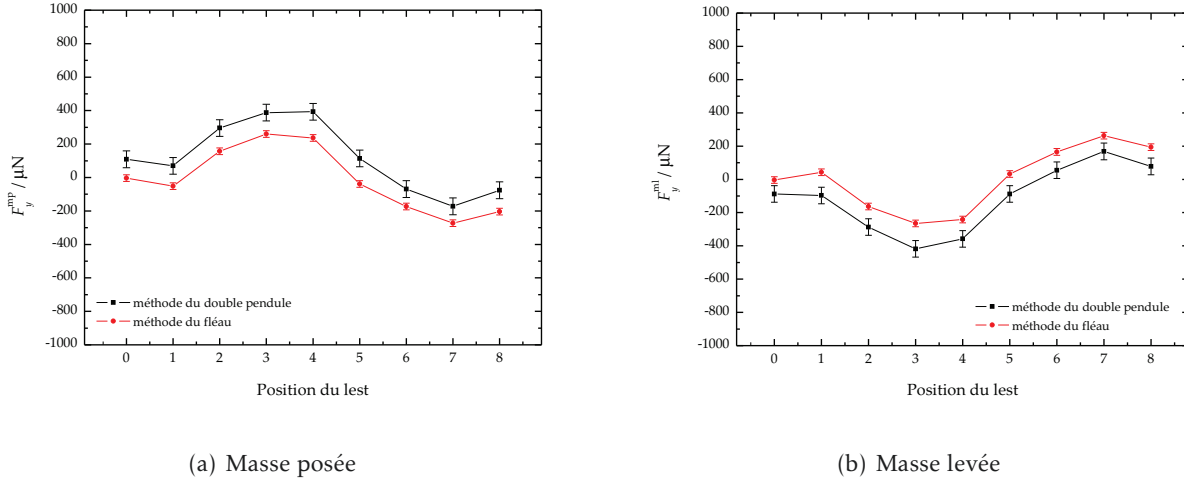


FIGURE 4.8 – Comparaison des deux modèles pour les évaluations des forces  $F_y^{\text{mp}}$  et  $F_y^{\text{ml}}$  en fonction de la position d'un lest de 670 mg.

à l'incertitude-type estimée de  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  par la méthode du double pendule. Les deux modèles interprètent de la même façon les modifications des conditions expérimentales.

#### 4.3.4.3 Discussion

Comme nous venons de le voir, l'écart-type de la différence des deux estimations de  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  est très faible. En revanche, la moyenne des différences de ces évaluations est de 200  $\mu\text{N}$ .

**a. Existence d'un moment vertical** Une hypothèse pour expliquer cette différence dans l'évaluation des forces serait l'existence d'un moment vertical  $\Delta M_z^{\text{stat}}$  constant pour un courant donné : par exemple, un moment lié à la forme de la bobine, imparfaitement circulaire.

Les deux modèles ont été bâtis en supposant les moments verticaux  $M_z$  nuls. Toutefois, le mouvement de lacet du fléau est sensible à ce moment vertical  $M_z$  contrairement à la méthode du double pendule.

**b. Évaluation à partir de la rotation différentielle de la bobine et du fléau** Ce moment  $\Delta M_z^{\text{stat}}$  peut être estimé en s'intéressant à la rotation différentielle de la bobine et du fléau (FIGURE 4.10).

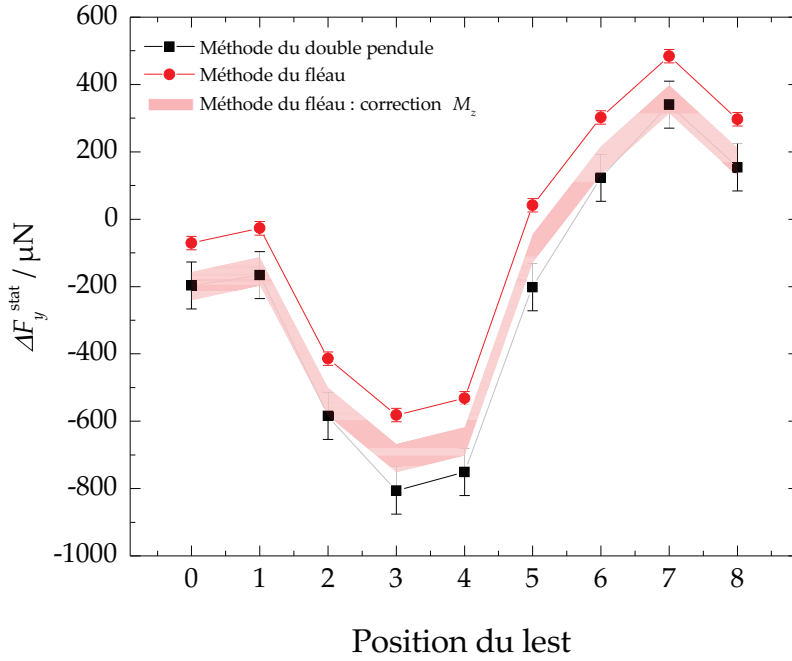


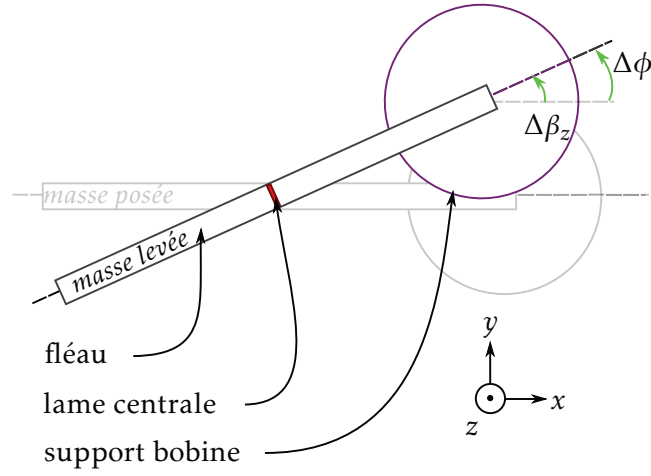
FIGURE 4.9 – Comparaison entre les évaluations des forces  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  effectuées par la méthode du fléau (cercles rouges) et par la méthode du double pendule (carrés noirs) en fonction de la position d'un lest de 670 mg. La surface rose correspond à la correction des valeurs de forces mesurées par la méthode du fléau du fait de l'existence d'un moment  $\Delta M_z^{\text{stat}}$  compris entre  $8 \mu\text{N} \cdot \text{m}$  et  $16,5 \mu\text{N} \cdot \text{m}$ . La contribution de ce moment avait été considérée négligeable (section 4.3.2.1) mais a été estimée au paragraphe b de la section 4.3.4.3.

Comme l'illustre la FIGURE 4.10 (cas a), si la bobine et le fléau tournent de concert autour de l'axe  $z$ , le mouvement angulaire de la bobine  $\Delta\beta_z^{\text{stat}}$  devrait être systématiquement égal au mouvement angulaire du fléau  $\Delta\phi^{\text{stat}}$ .

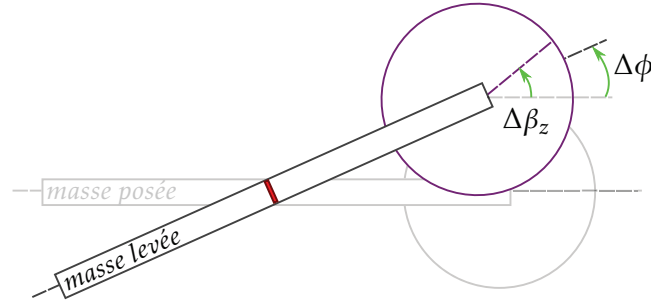
Les mesures montrent que la bobine tourne toujours davantage que le fléau lors d'une double pesée (cas b de la FIGURE 4.10), et toujours de la même quantité (environ  $50 \mu\text{rad}$ ). Une hypothèse est l'existence d'un moment  $M_z$  agissant sur la bobine.

En effet la comparaison à la FIGURE 4.11 de l'évolution de l'angle du fléau ( $\Delta\phi^{\text{stat}} = \phi^{\text{ml}} - \phi^{\text{mp}}$ ) lors des 9 doubles pesées de ces expériences à celle de l'angle de la bobine ( $\Delta\beta_z^{\text{stat}} = \phi^{\text{mp}} - \phi^{\text{ml}}$ ) autour de  $\vec{z}$  montre qu'il existe une relation affine entre  $\Delta\beta_z^{\text{stat}}$  et  $\Delta\phi^{\text{stat}}$ .

Ainsi, lorsque le fléau ne tourne pas lors d'une pesée (proche de la configuration 0), la bobine tourne d'environ 50 microradians : la bobine tourne



(a) Double pesée : la bobine et le fléau tournent du même angle.



(b) Double pesée : la bobine et le fléau tournent d'un angle différent.

FIGURE 4.10 – Schéma en vue de dessus de la rotation de la bobine ( $\Delta\beta_z^{\text{stat}} = \beta_z^{\text{ml}} - \beta_z^{\text{mp}}$ ) causée par des forces  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  et du fléau ( $\Delta\phi^{\text{stat}} = \phi^{\text{ml}} - \phi^{\text{mp}}$ ) causée par des moments  $\Delta M_z^{\text{stat}}$  lors d'une double pesée .

sous l'effet du moment  $\Delta M_z^{\text{stat}}$  tandis que le fléau reste immobile<sup>7</sup> sous l'effet conjugué de  $\Delta M_z^{\text{stat}}$  et  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  .

La raideur en torsion de la lame d'extrémité du fléau est inconnue. On peut toutefois l'estimer comprise entre  $0,16 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$  (raideur en torsion égale à la moitié de celle de la lame centrale : hypothèse de la dépendance linéaire de la raideur avec la charge) et  $0,33 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$  (raideur en torsion identique à celle de la lame centrale : hypothèse de l'indépendance de la raideur avec la charge).

Le moment  $\Delta M_z^{\text{stat}}$  est alors compris entre  $8 \text{ } \mu\text{N} \cdot \text{m}$  et  $16,5 \text{ } \mu\text{N} \cdot \text{m}$ . Ceci correspond également à une force fictive  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  comprise entre  $80 \text{ } \mu\text{N}$  et  $165 \text{ } \mu\text{N}$ , mesurée par la méthode du fléau.

7. En effet, nous avons cherché à avoir un mouvement de lacet du fléau le plus faible possible pour la configuration 0.

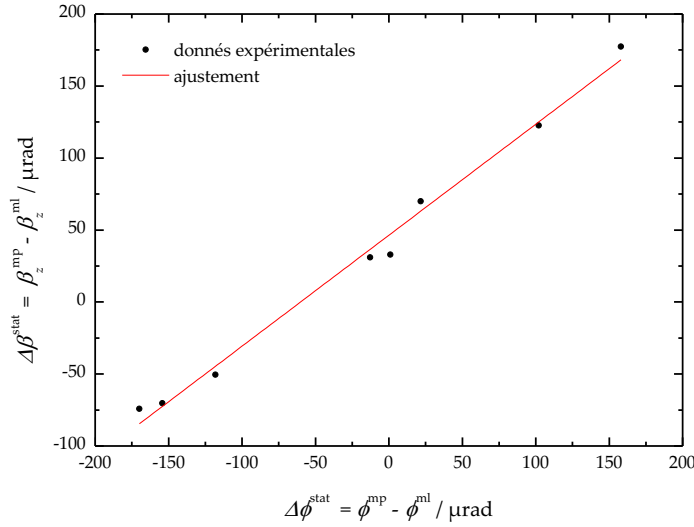


FIGURE 4.11 – Comparaison de l'évolution de l'angle du fléau ( $\Delta\phi = \phi^{\text{mp}} - \phi^{\text{ml}}$ ) à celle de l'angle de la bobine autour de  $\vec{z}$  ( $\Delta\beta_z = \beta_z^{\text{mp}} - \beta_z^{\text{ml}}$ ) lors des doubles pesées décrites dans cette section.

On reporte alors à la FIGURE 4.9 les forces estimées par la méthode du fléau corrigée de l'estimation de  $\Delta M_z^{\text{stat}} \cdot L$ .

**c. Conclusion** Dans les expériences de cette section, la bobine a été lestée sur son pourtour de 670 mg. Par rapport à la position d'équilibre sans lest, sa position d'équilibre au repos a changé d'environ 25  $\mu\text{m}$  et 200  $\mu\text{rad}$ , tandis que le lacet du fléau a été modifié de 50  $\mu\text{rad}$ .

Ce lest a été déplacé sur le périmètre de la bobine en neuf positions différentes. Pour chacune de ces configurations, les différences des forces  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  (perpendiculaires à l'axe du fléau) ont été évaluées par deux méthodes : la méthode du fléau et la méthode du double pendule.

Ces deux évaluations des forces  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  pour différentes positions de la bobine au repos présentent une allure très semblable (l'écart-type de leur différence est de 40  $\mu\text{N}$  pour des forces variant de 1200  $\mu\text{N}$ ).

La différence mesurée, valant environ 200  $\mu\text{N}$ , peut s'expliquer en partie par l'existence d'un moment parasite  $\Delta M_z^{\text{stat}}$ , équivalent à une force fictive comprise entre 80  $\mu\text{N}$  et 165  $\mu\text{N}$ . Ce moment a été révélé par la rotation différentielle de la bobine et du fléau. La raideur en torsion de la lame d'extrémité est toutefois mal connue : des expériences complémentaires permettraient d'approfondir cette comparaison.

La borne haute de l'évaluation de cette force fictive rend les déterminations des forces  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  compatibles à un écart-type (FIGURE 4.9). Par conséquent,

nous considérerons que les incertitudes évaluées au paragraphe b de la section 4.3.3.1 pour les évaluations des forces et des moments parasites par la méthode du double pendule sont validées expérimentalement.

## 4.4 Minimisation du déplacement de la suspension

Dans la section précédente, nous nous sommes assurés de la robustesse des évaluations par la méthode du double pendule des forces parasites  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  (et par extension de  $\Delta F_x^{\text{stat}}$ ,  $\Delta M_x^{\text{stat}}$  et  $\Delta M_y^{\text{stat}}$ ) s'exerçant sur la bobine lors des deux équilibres de la double pesée. Les principes physiques qui sous-tendent la méthode du double pendule vont nous permettre de régler la position et l'inclinaison de la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique.

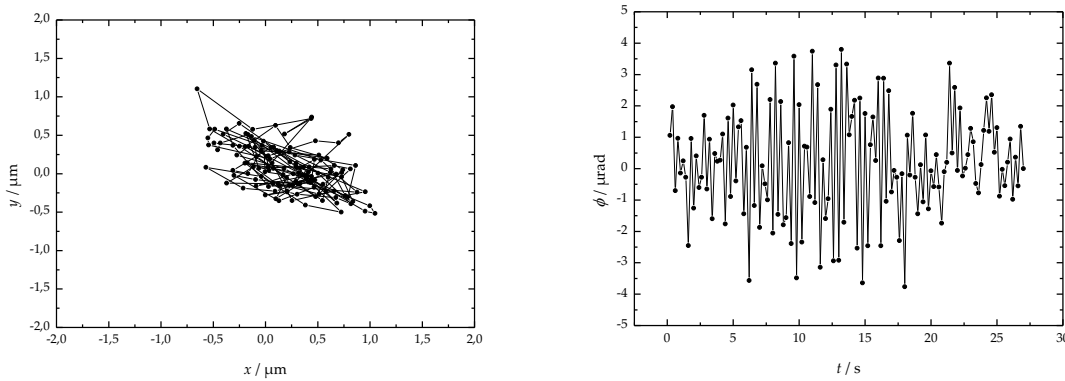
Dans cette section, nous allons minimiser le déplacement de la suspension en minimisant le mouvement de la bobine et le mouvement de lacet du fléau.

### 4.4.1 Position stabilisée de la bobine et du fléau

On ne peut minimiser le déplacement de la bobine qu'à concurrence de l'amplitude de son mouvement irréductible.

#### 4.4.1.1 Mouvement irréductible

Les courbes de cette section ont été réalisées à une fréquence d'échantillonnage de 5 Hz (ce qui est la même fréquence que lors des mesures de  $h$  décrites dans le chapitre suivant), cloche fermée, après une nuit de repos. Le courant



(a) Évolution temporelle de la position de la bobine ( $x, y$ ) durant 13,5 s, après une nuit de stabilisation (échantillonnage à 5 Hz).

(b) Évolution temporelle de la position du fléau ( $\phi$ ) durant environ 30 s, après une nuit de stabilisation (échantillonnage à 5 Hz).

FIGURE 4.12 – Évolutions temporelles des positions de la bobine et du fléau, après une nuit de stabilisation

circulant dans la bobine est asservi pour équilibrer le défaut de masse : on se place ainsi dans la configuration d'une pesée qui se serait stabilisée durant une dizaine d'heures.

Dans ces conditions, on représente les évolutions temporelles de la position  $(x, y)$  de la bobine (FIGURE 4.12(a)) à partir d'une position d'origine de référence  $(0, 0)$  sur une durée de 13,5 s et du lacet du fléau  $\phi$  (FIGURE 4.12(b)) sur une durée d'environ 30 s.

On peut donc obtenir la dispersion des mesures de positions (due au bruit des capteurs, aux mouvements réels de la bobine ou à tout autre effet) :

- Dispersion de la mesure de position de la bobine dans le plan  $Oxy$  :  $0,3 \mu\text{m}$  (écart-type de la distribution) ;
- Dispersion de la mesure de l'angle de la bobine :  $2,2 \mu\text{rad}$  ;
- Dispersion de la mesure du lacet du fléau :  $1,7 \mu\text{rad}$ .

Ainsi, lorsque la bobine est stabilisée, ses mouvements se limitent à des déplacements de l'ordre du micromètre. Dans les mêmes conditions, le mouvement de lacet du fléau n'excède pas 10 microradians.

Les mouvements que nous venons de décrire correspondent à des degrés de liberté non asservis de la suspension. En revanche l'asservissement du fléau par le capteur gaussien fixe l'altitude de son extrémité et par voie de conséquence la position verticale  $z$  de la bobine qui est fixée avec un écart-type de 10 nm.

#### 4.4.1.2 Durée de stabilisation

Nous avons également étudié la durée nécessaire pour effectuer la transition masse levée vers masse posée.

La FIGURE 4.13 montre l'évolution temporelle de l'amplitude du mouvement de lacet du fléau<sup>8</sup>, pour une fréquence d'échantillonnage de 5 Hz, induit par la dépose de masse (courbe noire).

L'excursion est aussi importante que 3 mrad, point à partir duquel le fléau rebrousse chemin et oscille jusqu'à un maximum de  $-3,5 \text{ mrad}$ . Puis les oscillations s'amortissent : 6 minutes environ sont nécessaires pour obtenir une amplitude de mouvement de l'ordre de  $10 \mu\text{rad}$ .

Voulant limiter l'amplitude du mouvement de lacet du fléau (lors même que la masse était posée et levée à une vitesse très réduite,  $10 \mu\text{m/s}$ ) nous avons ajouté aux anses du berceau des butées latérales (vis micrométriques à extrémité sphérique). On peut constater à la consultation de la courbe rouge de la FIGURE 4.13 que si l'amplitude de l'oscillation initiale est significativement réduite, de même que l'amplitude des oscillations résiduelles ( $5 \mu\text{rad}$ ), il est toujours nécessaire de patienter plus de 5 minutes pour obtenir une bonne stabilisation spatiale du fléau (c'est-à-dire pour obtenir des grandeurs

---

8. On décrit ici le lacet du fléau ; les autres degrés de libertés se comportant de manière similaire.



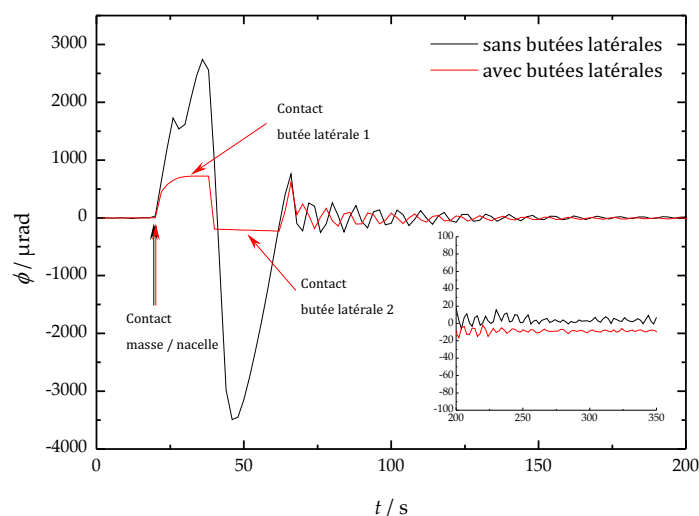


FIGURE 4.13 – Excursion du lacet du fléau lors de la dépose de la masse étalon

comparables à celles des mouvements de la section précédente): c'est également vrai pour le double pendule de la suspension et donc pour la bobine. Le mouvement constaté après ces 5 minutes ne s'amortit plus: il s'agit d'un mouvement entretenu, vraisemblablement par les vibrations mécaniques du système de translation verticale (asservi en position fixe pour ces expériences).

En pratique, il faudra donc environ 10 minutes pour mesurer la position de la bobine en masse posée, puis en masse levée de telle manière que le facteur limitant pour la détermination de la position soit le mouvement permanent de la bobine. Il faut noter que les pesées de détermination de  $h$  décrites au chapitre 5 s'enchainent toutes les 2 à 3 minutes, qui est le temps nécessaire pour obtenir une bonne stabilisation de l'altitude  $z$  de la bobine et donc du courant de pesée.

S'il n'a pas été mis en évidence d'effet significatif de ces mouvements sur les pesées, cela n'est pas satisfaisant et il faudra mettre au point une solution pour limiter ces mouvements de lacet et de bobine.

#### 4.4.1.3 Répétabilité

La répétabilité des mesures de positions  $(x, y)$ , d'angles  $(\beta_x, \beta_y)$  et de lacet du fléau  $(\phi)$  a été évaluée respectivement à  $0,3 \mu\text{m}$ ,  $0,4 \mu\text{rad}$  et  $2 \mu\text{rad}$  par la mesure de ces grandeurs à 5 reprises, en alternant les équilibres « masse levée », « masse posée » et « masses équilibrées », après une attente de stabilisation de 5 min.

#### 4.4.2 Minimisation du déplacement de la suspension

Comme expliqué à la page 119, il est nécessaire d'accéder à la position d'équilibre de la bobine à courant nul (bobine au repos, configuration « masses

équilibrées ») pour l'évaluation des forces et moments parasites par la méthode du double pendule.

En première approximation, nous considérons que la différence des forces et des moments parasites s'exerçant dans les deux phases de la pesée ( $\Delta F_x$ ,  $\Delta F_y$ ,  $\Delta M_x$  et  $\Delta M_y$ ) est minimisée si le déplacement de la bobine à l'extrémité de sa suspension ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta \beta_x$ ,  $\Delta \beta_y$ ) et si le mouvement de lacet du fléau ( $\Delta \phi$ ) sont minimisés.

Sans réglages particuliers, la bobine se déplace typiquement d'environ 100  $\mu\text{m}$  et 100  $\mu\text{rad}$ , tandis que le lacet du fléau vaut 200  $\mu\text{rad}$  entre les deux positions d'équilibre de la pesée (soit masse étalon levée puis masse étalon posée dans la nacelle de la suspension).

Dans ces conditions, on peut estimer (équations 4.22 et 4.23) les forces horizontales  $\Delta F_x^{\text{stat}}$  et  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  à plusieurs dizaines de millinewtons et les moments  $\Delta M_x^{\text{stat}}$  et  $\Delta M_y^{\text{stat}}$  à plusieurs millinewtons-mètres.

#### 4.4.2.1 Translation de la bobine

La première étape de l'expérience consiste à déplacer la lame centrale du fléau, et par conséquent l'ensemble fléau-suspension-bobine sur une distance de 800  $\mu\text{m}$  par pas de 200  $\mu\text{m}$  au moyen du pantographe.

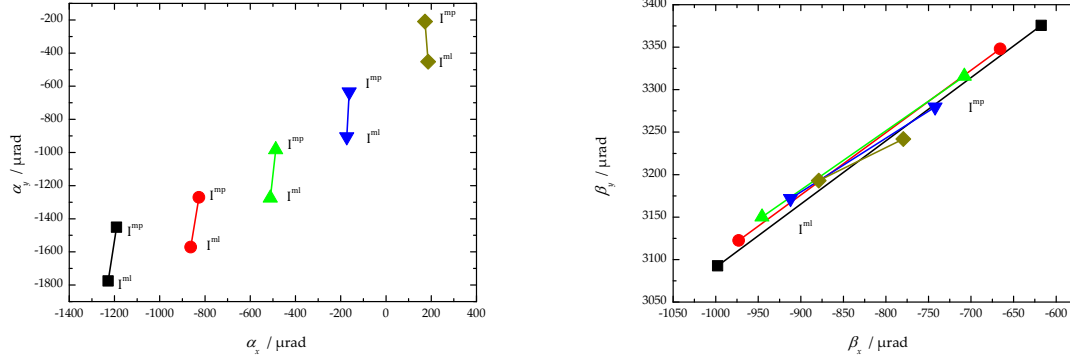
Pour chacun des déplacements, la position de la bobine ( $x$ ,  $y$ ) telle que relevée par les capteurs de position, est mesurée pour l'équilibre masse posée (courant  $I^{\text{mp}}$  négatif) et pour l'équilibre masse levée (courant  $I^{\text{ml}}$  positif). On mesure également la position  $\phi$  de lacet du fléau.

La distance entre les deux positions occupées par la bobine lors des phases de la pesée, d'environ 75  $\mu\text{m}$ , reste pratiquement constante pour les cinq déplacements étudiés.

Par ailleurs, la position angulaire de la bobine définie par les coordonnées ( $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ) est enregistrée pour chacune des étapes de la translation. La FIGURE 4.14(b) montre que la variation de la position de la bobine dans le plan  $Oxy$  modifie ses mouvements angulaires. Pour les cinq déplacements indiqués, la diminution du déplacement angulaire (de 500  $\mu\text{rad}$  à 100  $\mu\text{rad}$ ) est visible.

Ce comportement s'explique par le fait que le déplacement de la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique modifie les moments s'exerçant sur elle (équations 4.2 page 111) : le segment 2 (et donc la bobine, repérée par les angles  $\beta_x$  et  $\beta_y$ ) s'incline.

Les positions mesurées (déplacements ( $x$ ,  $y$ ) et ( $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ) de la bobine, lacet  $\phi$  du fléau), permettent de déterminer les positions angulaires ( $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ) du segment 1 de la suspension (équations C.13). On les a représentées à la FIGURE 4.14(a), avec les mêmes conventions que précédemment. On peut y vérifier que ce segment de la suspension n'est pas sensible à la variation des moments qui s'exercent sur la bobine.



(a) Déviation angulaire du segment 1 de la suspension lorsque la lame flexible centrale du fléau est translatée de 800  $\mu\text{m}$  par pas de 200  $\mu\text{m}$ .

(b) Déviation angulaire de la bobine (ou segment 2 de la suspension) lorsque la lame flexible centrale du fléau est translatée de 800  $\mu\text{m}$  par pas de 200  $\mu\text{m}$ .

FIGURE 4.14 – Déviation angulaire des deux segments de la suspension lorsque la lame flexible centrale du fléau est translatée

#### 4.4.2.2 Inclinaison de la bobine

La seconde étape de l'expérience consiste en l'inclinaison de la bobine par rapport à sa position initiale dans le plan horizontal.

Pour cela, la position de la lame flexible centrale du fléau est maintenue à une position fixée par le pantographe et des poids (de masses inférieures au gramme) sont placés sur la périphérie de la bobine de manière à modifier l'angle entre le bobinage et le plan moyen du circuit magnétique. Si la position initiale de la bobine est modifiée (de par la modification de la position du centre de gravité de la bobine), le principal effet est que la variation de l'inclinaison modifie les forces horizontales qui s'exercent sur la bobine.

À nouveau, on a mesuré les positions de la bobine (linéaire et angulaire) et du fléau (lacet) pour les équilibres masse levée puis masse posée.

Une modification de l'inclinaison initiale de la bobine de 1 mrad entraîne une variation du déplacement angulaire de 200  $\mu\text{rad}$  à 400  $\mu\text{rad}$  et une variation du déplacement linéaire de 50  $\mu\text{m}$  à 200  $\mu\text{m}$ . Incliner la bobine affecte les forces horizontales et dans une moindre mesure les moments ; par conséquent les angles des deux segments de la suspension sont modifiés (puisque les déviations angulaires des deux segments sont sensibles aux forces horizontales) et donc la position et l'inclinaison de la bobine.

#### 4.4.2.3 Minimisation du déplacement de la suspension durant la pesée

Les deux expériences précédentes illustrent la méthode que nous avons utilisée pour minimiser les mouvements de la suspension. Alors que la translation de la bobine dans l'entrefer de l'aimant modifie la déviation angulaire

du segment 2 de la suspension, son inclinaison modifie la déviation angulaire des deux segments et le lacet du fléau.

Si on ajuste l'assiette de la bobine jusqu'au point où le mouvement angulaire du segment 1 (et par voie de conséquence le lacet du fléau) est considéré négligeable, cela signifie que les différences des forces  $\Delta F_x^{\text{stat}}$  et  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  s'exerçant sur la bobine lors des deux équilibres de la double pesée sont minimisées.

Il faut ensuite minimiser les moments  $\Delta M_x^{\text{stat}}$  et  $\Delta M_y^{\text{stat}}$  en translatant la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique pour minimiser le mouvement du segment 2 de la suspension.

Si ces deux réglages étaient totalement indépendants, deux étapes suffiraient pour annuler le mouvement de la suspension. Toutefois, comme on peut le constater à la FIGURE 4.14(a), la déviation angulaire du segment 1 de la suspension n'est pas totalement insensible à la translation de la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique. Elle le serait si les forces ne variaient effectivement pas. En réalité, cette translation modifie les moments (changement de position dans l'entrefer du circuit magnétique, équations 4.2) et donc incline le segment 2 (équations C.9). Cette nouvelle inclinaison de la bobine modifie les forces qui s'exercent sur elle (équations 4.2) et donc l'inclinaison du segment 1.

Néanmoins, par ajustements successifs, il est possible de considérablement réduire les déplacements de la suspension et du fléau, et donc de la bobine.

Ainsi, en finalisant le réglage de la position de la bobine par incréments aussi petits que  $5\ \mu\text{m}$  et  $25\ \mu\text{rad}$ , il est possible de réduire les mouvements linéaires et angulaires de la bobine à moins de  $2\ \mu\text{m}$  et à moins de  $1\ \mu\text{rad}$  de l'équilibre à  $I^{\text{mp}}$  puis  $I^{\text{ml}}$ . À ce déplacement de la bobine est associé un mouvement de lacet du fléau autour de l'axe  $\vec{z}$  de l'ordre de  $1\ \mu\text{rad}$ .

Les forces parasites  $\Delta F_x^{\text{stat}}$  et  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  évaluées sont alors inférieures en valeur absolue à  $50\ \mu\text{N}$  et les moments parasites associés  $\Delta M_x^{\text{stat}}$  et  $\Delta M_y^{\text{stat}}$  sont inférieurs en valeur absolue à  $30\ \mu\text{N} \cdot \text{m}$  [199].

Compte-tenu du mouvement permanent de la bobine et du fléau (section 4.4.1.1), ces forces et moments parasites sont les plus faibles réalisables en l'état actuel de l'expérience.

## 4.5 Forces et moments parasites impliqués dans la détermination de la constante de Planck

Les expériences décrites dans ce chapitre avaient pour but de comparer deux méthodes d'évaluation des forces, puis d'assurer un mouvement minimal à la bobine et au fléau entre les deux phases de la pesée. Ces doubles pesées n'étaient pas encore des phases statiques en ce sens qu'elles n'étaient pas entrelacées de phases dynamiques.

Les déterminations de la valeur de la constante de Planck (chapitre suivant) supposent un fonctionnement quasi-continu durant plusieurs semaines,

et des équilibres de phases statiques interrompus par des montées et des descentes de la bobine (phase dynamique) et des amenées et des retrait de masse (transition phase statique – phase dynamique). Enfin, en phase dynamique, le fléau repose sur une butée rudimentaire (cylindre visible en FIGURE 2.9 page 46). Les déplacements de la bobine obtenus en phase statique entre les deux équilibres de la pesée sont alors de quelques micromètres et quelques microradians (le lacet du fléau est alors d’une dizaine de microradians).

Les valeurs de forces et de moments parasites, vérifiées périodiquement durant la campagne de mesure et déterminées par la méthode du double pendule, sont alors limités au maximums reportés dans le TABLE 4.2 pour les déterminations de  $h$ .

TABLE 4.2 – Forces et moments parasites estimés lors des phases statiques de la détermination de la constante de Planck.

Forces et moments parasites : détermination de $h$	
$ \Delta F_x^{\text{stat}} $	$< 90 \text{ } \mu\text{N}$
$ \Delta F_y^{\text{stat}} $	$< 250 \text{ } \mu\text{N}$
$ \Delta M_x^{\text{stat}} $	$< 50 \text{ } \mu\text{N} \cdot \text{m}$
$ \Delta M_y^{\text{stat}} $	$< 100 \text{ } \mu\text{N} \cdot \text{m}$
$ \Delta M_z^{\text{stat}} $	$< 50 \text{ } \mu\text{N} \cdot \text{m}$

La valeur retenue pour le moment vertical,  $|\Delta M_z^{\text{stat}}|$ , est elle un majorant des estimations effectuées en section 4.3.4.3.

Ce sont ces valeurs qui serviront à déterminer l’erreur de puissance (et l’incertitude-type relative associée  $u_r(P)$ ) lors de la détermination de la valeur de la constante de Planck décrite au chapitre suivant, de même que le biais associé au fléau ( $u_r(f)$ ).

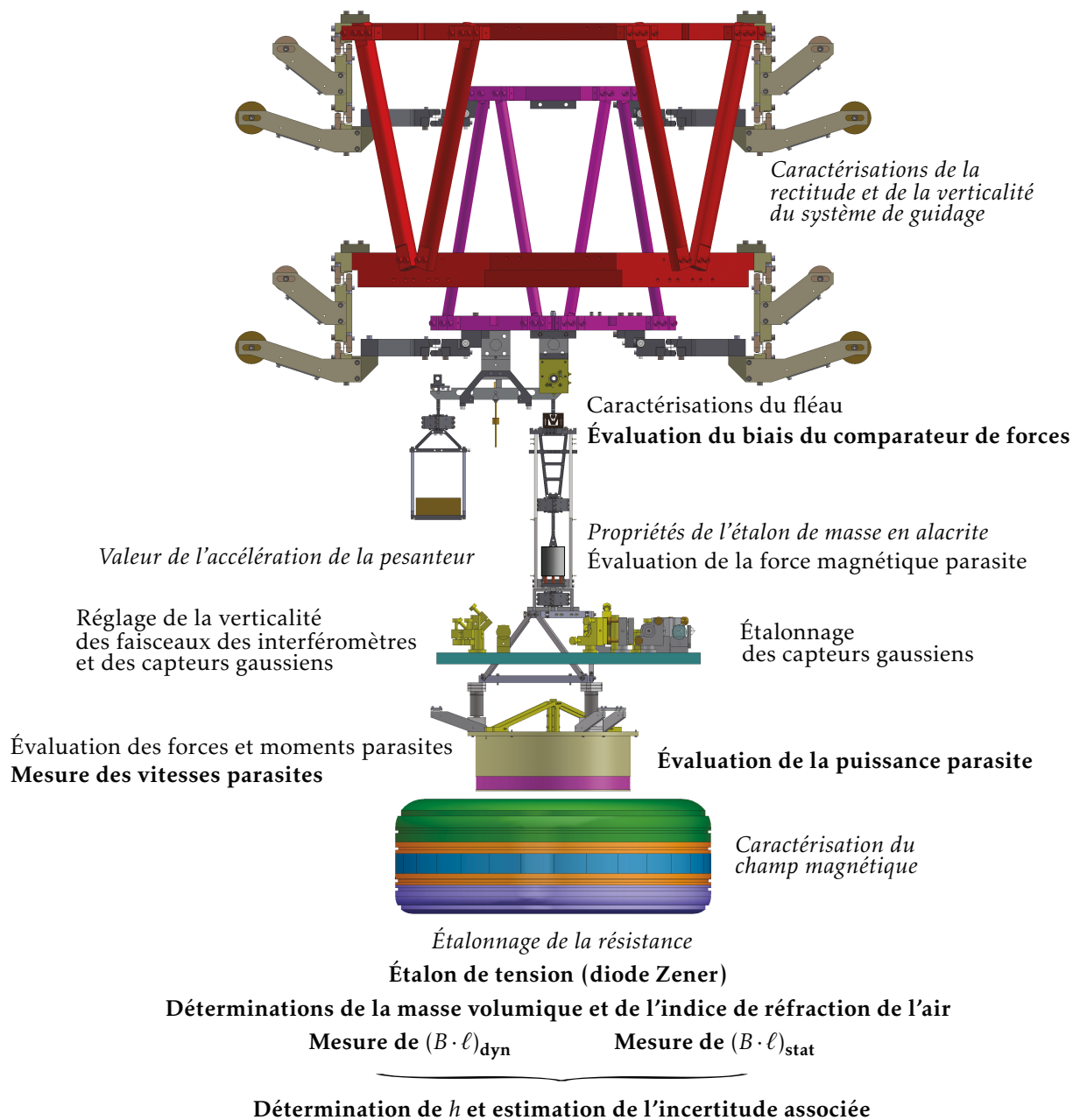
## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit le processus permettant de diminuer le mouvement de la suspension de la balance du watt à quelques micromètres et quelques microradians.

La comparaison des résultats de l’évaluation des forces  $\Delta F_y^{\text{stat}}$  par la méthode du double pendule et la méthode du fléau a permis de valider les incertitudes-types sur l’évaluation des forces et des moments parasites par

la méthode du double pendule ( $50\ \mu\text{N}$  pour les forces et  $15\ \mu\text{N}\cdot\text{m}$  pour les moments).

Enfin, nous avons déterminé les valeurs des forces et des moments parasites impliqués dans la détermination de la valeur de la constante de Planck effectuée au chapitre suivant.



Dans ce chapitre, les premières déterminations de la valeur des **facteurs géométriques en phase dynamique**  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}$  (section 5.2.1) et **en phase statique**  $(B \cdot \ell)_{\text{stat}}$  (section 5.2.2) sont effectuées. La combinaison de ces deux résultats permet la détermination de **la valeur de la constante de Planck** (section 5.2.3). Il est nécessaire d'appliquer des corrections liées au fonctionnement de la balance dans l'air (**masse volumique et indice de réfraction de l'air**, section 5.1). Les valeurs des forces et moments parasites obtenues au chapitre précédent permettent de déterminer l'incertitude liée au **biais du comparateur de forces** (section 5.3.3.4), ainsi que celle liée à la **puissance parasite** (la mesure des **vitesses parasites** est également nécessaire, section 5.3.5). Une évaluation de l'incertitude due à l'utilisation d'un **étalon de tension à diode Zener** (section 5.3.2) est donnée. Finalement, ces informations sont utilisées pour donner la **valeur de la constante de Planck** déterminée au LNE lors de l'été 2014 et l'**incertitude-type associée** (section 5.4).

---

## Chapitre 5

# Détermination de la valeur de la constante de Planck

---

Après des années de développements séparés des différents éléments, de très nombreuses caractérisations et améliorations, la balance du watt du LNE a été assemblée. La plupart des caractérisations *in situ* ont été décrites dans les chapitres précédents.

Tous les éléments nécessaires à la détermination de la valeur de la constante de Planck sont à présents fonctionnels .

Un logiciel, permettant de construire des séquences complètes de mesures de la valeur de constante de Planck a été développé : il permet de programmer la suite d'étapes élémentaires correspondant à la configuration de chaque instrument et à leur déclenchement. Les conditions environnementales, les étalonnages et les données mesurées sont stockées et traitées *a posteriori*.

### 5.1 Données environnementales

Toutes les mesures décrites dans ce chapitre [201] ont été effectuées après que l'enceinte de la balance du watt ait été scellée : la température, la pression, l'humidité relative et la concentration de dioxyde de carbone ont été mesurées continûment durant les expériences. La masse volumique de l'air  $\rho_{\text{air}}$  et son indice de réfraction  $n_{\text{air}}$  ont été calculés à partir des travaux de Ciddòr [202] et des recommandations CIPM-2007 [203]. Ces deux grandeurs sont nécessaires pour calculer la correction sur la masse liée à la poussée d'Archimède et la correction sur la vitesse liée à l'indice de réfraction de l'air. Un exemple de la détermination de ces corrections relatives est donné à la FIGURE 5.1 sur une période d'une semaine<sup>1</sup>.

---

1. Le format utilisé pour représenter les dates dans ce chapitre est le *modified Julian date*, MJD, « jour julien modifié » qui correspond au nombre fractionnaire de journées s'étant écoulées depuis le 17 novembre 1858 à 00h00. Ainsi, nous célébrerons la date MJD 58 000 le 4 septembre 2017 à 00h00 UTC.



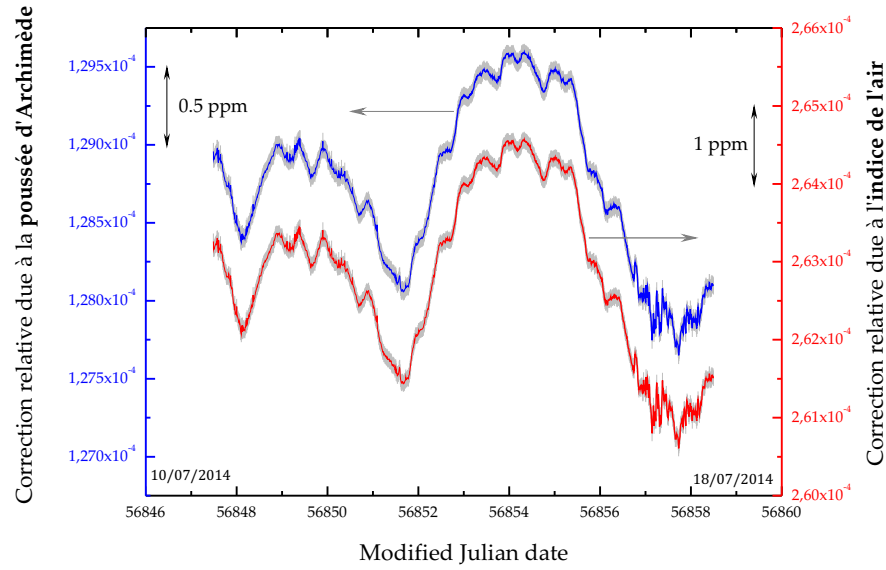


FIGURE 5.1 – Correction sur la masse  $m$  due à la poussée d'Archimède (courbe bleue), correction sur la vitesse  $v_z$  due à l'indice de réfraction de l'air (courbe rouge) relativement à la valeur de la constante de Planck. Les surfaces grisées représentent l'incertitude-type combinée sur ces corrections (à ce sujet, voir les sections 5.3.3.2 et 5.3.4). Ces valeurs s'étendent sur une durée d'une semaine.

## 5.2 Résultats

### 5.2.1 Phase dynamique : détermination de $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}} = \frac{U}{v_z}$

La bobine est positionnée au point de départ de la trajectoire.

Elle est déplacée vers le bas à une vitesse typique de  $2 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ , imposée par le moteur pas-à-pas, sur une distance réduite à 14 mm par une limitation du système de déclenchement vertical. Son passage devant un capteur gaussien vertical déclenche puis interrompt les acquisitions de tension<sup>2</sup> et de vitesse. Durant la trajectoire, la tension  $U^d$ , la vitesse  $v_z^d$  ( $d$  pour descente) ainsi que la position verticale  $z$  de la bobine sont mesurées (comme décrit au chapitre 2) et enregistrées simultanément, avec une périodicité de 200 ms, commandée par les voltmètres. Chacune de ces trajectoires est décrite par 35 points de données et dure 7 secondes.

Un exemple d'une tension relevée lors des 35 points constituant une descente est donné en FIGURE 5.2 courbe noire : la valeur moyenne de ces échantillons est de 1,0725 V et leur écart-type est 0,0016 V. Les vitesses correspondantes mesurées ont une valeur moyenne de  $2,0000 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (qui est effectivement la vitesse demandée au moteur pas-à-pas) pour un écart-type de  $0,0031 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (FIGURE 5.2 courbe rouge).

2. Dans ce chapitre, les grandeurs électriques sont notées sans indiquer « 90 » en indice, contrairement au choix effectué pour le chapitre 1.

Les mesures de tension  $U$  et de vitesse verticale  $v_z$  ont la même allure : la vitesse verticale de la bobine induit la tension aux bornes de la bobine. Le soin apporté à la synchronisation des mesures de tension et de vitesse doit permettre de rejeter au maximum le bruit présent sur ces mesures pour accéder au profil. Effectivement, le rapport signal à bruit de la fraction  $\frac{U}{v_z}$  est significativement meilleur que les rapports signal à bruit sur la tension ou la vitesse pris séparément. À la FIGURE 5.3 nous avons superposé les mesures de tension (trait noir), les mesures de vitesse (cercles rouges pleins) et le profil de champ déduit (trait bleu). Ces 3 grandeurs sont représentées en déviation relative à leur moyenne : on constate que la corrélation entre les mesures de tension  $U$  et de vitesse  $v_z$  (écart-type relatif de  $1,3 \times 10^{-3}$  dans les deux cas) permet une réjection du bruit proche d'un facteur 100 (écart-type relatif de  $1,7 \times 10^{-5}$  pour le profil de champ).

Ce rapport de la tension à la vitesse permet d'obtenir le profil de champ (FIGURE 5.3 courbe bleue), soit le facteur géométrique<sup>3</sup> dépendant de l'abscisse  $z$  pour cette première trajectoire :

$$(B \cdot \ell)_{\text{dyn}, 1}(z) = \left( \frac{U^d}{v_z^d} \right)(z). \quad (5.1)$$

Comme attendu (voir la valeur du champ magnétique mesuré par une sonde à effet Hall, FIGURE 2.13 page 53), la forme obtenue pour le profil de champ passe par un minimum à mi-hauteur de l'entrefer de l'aimant. Quatorze millimètres de déplacement ne permettent toutefois de décrire que la portion centrale du profil en selle de cheval visible à la FIGURE 2.13.

Après la première descente, un déplacement vers le haut est ensuite effectué dans les mêmes conditions. On obtient donc un second profil de champ ( $m$  pour montée) :

$$(B \cdot \ell)_{\text{dyn}, 2}(z) = \left( \frac{U^m}{v_z^m} \right)(z). \quad (5.2)$$

On alterne ainsi les montées et les descentes. Une séquence typique de la phase dynamique consiste en l'enchaînement de cent paires de trajectoires descendantes et ascendantes de la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique. Nous n'avons pas noté de différence significative entre les profils mesurés lors des descentes de la bobine et ceux mesurés lors de ses montées. Le profil de champ retenu pour cette séquence est la moyenne des profils repérés par l'entier  $j$  :

$$(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}(z) = \left\langle (B \cdot \ell)_{\text{dyn}, j}(z) \right\rangle. \quad (5.3)$$

L'incertitude de type A sur chacun des 35 rapports  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}(z)$  est évaluée en considérant l'incertitude expérimentale sur la moyenne de chacun des

---

3. Ce facteur géométrique est déterminé par rapport au « système 90 », consulter à cet effet la page 23. Il se note en toute rigueur  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}, 90} = \left( \frac{U_{90}}{v_z} \right)$ . Afin de ne pas surcharger les écritures, il sera noté ici  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}} = \left( \frac{U}{v_z} \right)$ .

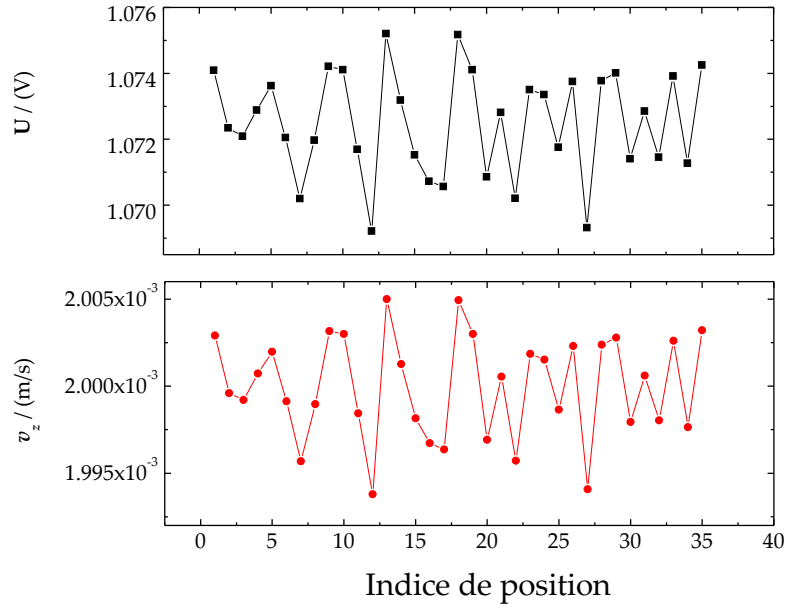


FIGURE 5.2 – Mesures de tension  $U(z)$  (courbe noire) ainsi que de vitesse verticale  $v_z(z)$  (courbe rouge) lors d’une descente de 14 mm de la bobine (échantillonnage de 200 ms).

35 points des 200 profils initiaux (cent paires) : on représente alors le profil moyen avec ces incertitudes à la FIGURE 5.4, qui correspond alors à environ 45 minutes de mesures.

De manière à tirer profit de l’ensemble des valeurs du profil de champ pour la détermination du facteur géométrique à l’altitude  $z_0$  de pesée, un ajustement polynomial d’ordre 2 est utilisé sur le profil moyen de champ obtenu et c’est la valeur de ce polynôme en  $z_0$  qui définit le facteur géométrique. L’ajustement permet d’utiliser l’ensemble des informations obtenues lors de la détermination du profil de champ pour la détermination de  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}$ . Il n’existe pas de loi physique permettant de déterminer l’ordre du polynôme à utiliser. Nous avons choisi d’utiliser le polynôme de degré le plus faible dont l’histogramme des résidus est gaussien : le degré 2 est alors choisi. En tout état de cause, la différence d’estimation de la valeur du profil de champ pour les polynômes d’ordre 2, 3 ou 4 sont très inférieurs à  $5 \times 10^{-8}$  : cette différence est donc pour l’instant négligeable.

Enfin un certains nombre de grandeurs sont enregistrées durant les trajectoires. En particulier, les vitesses parasites (linéaires et angulaires) de la bobine sont enregistrées, à partir des informations des capteurs gaussiens de position et des interféromètres.

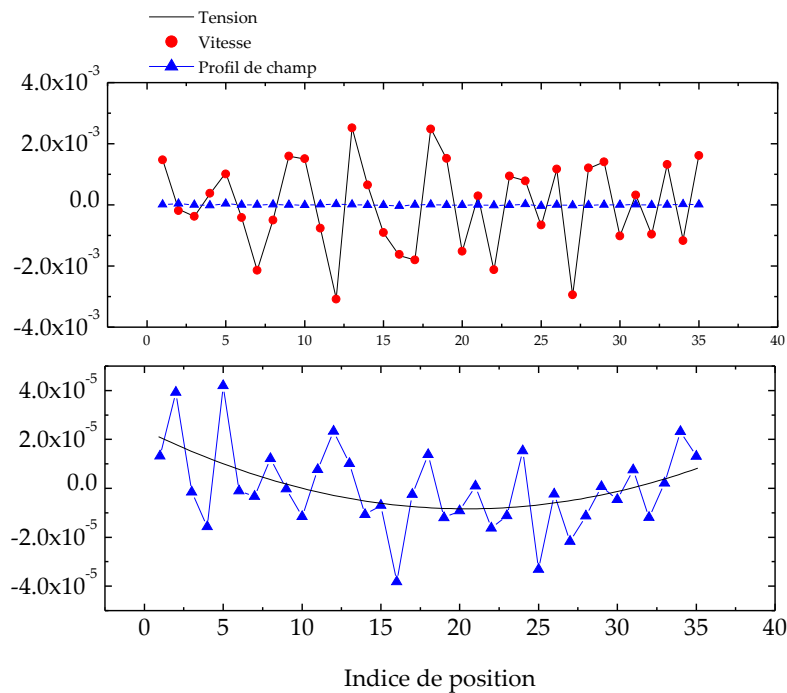


FIGURE 5.3 – *Graphique supérieur* : Superposition des variations relatives à leur moyenne des mesures de tension  $U(z)$  (courbe noire), de vitesse verticale  $v_z(z)$  (points rouge) et du profil de champ  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}(z)$  (courbe bleue, triangles bleus) lors des 35 points d'échantillonnage d'une descente (200 ms de temps d'intégration, 14 mm de course). La corrélation entre les mesures de tension et de vitesse est très apparente dans cette représentation. Le taux de réjection est d'environ 100. *Graphique inférieur* : Vue agrandie du profil de champ avec une courbe d'ajustement parabolique en noir. Son minimum est visible, à proximité du milieu de la trajectoire.

### 5.2.2 Phase statique : détermination de $(B \cdot \ell)_{\text{stat}} = \frac{m \cdot g}{I}$

Une séquence de phase statique s'effectue à l'altitude  $z_0$ . Elle correspond à une succession de paires d'étapes « masses levées » et « masses posées ».

Pour ces deux étapes, le courant est continûment ajusté par une source programmable de manière à assurer la stabilité de l'angle relatif du fléau sur l'horizontale (tangage) : le fléau est alors à l'équilibre. La détermination de l'angle du fléau par rapport à un plan nominalelement horizontal est assuré par un faisceau laser focalisé sur une lame solidaire de l'extrémité du fléau (capteur gaussien, FIGURE 2.7 page 44).

Toutefois, lors de la transition « masse posée » à « masse levée » ou de « masse levée » à « masse posée », la bande passante de l'asservissement du courant par la source programmable est trop faible pour assurer l'équilibre permanent du fléau : celui-ci s'incline jusqu'à reposer sur une butée méca-

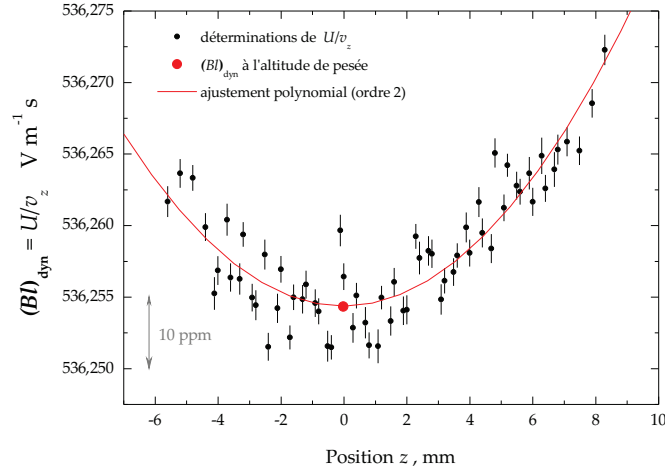


FIGURE 5.4 – Évaluation du profil de champ obtenu par la moyenne des valeurs durant une séquence de 100 trajectoires (descentes et montées). La courbe rouge est un ajustement du second ordre de ces données qui permet d’obtenir la valeur du profil de champ à l’altitude du point de pesée  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}$ . Les incertitudes tracées sont une évaluation de type A.

nique (inclinaison d’environ 5 mrad) puis retrouve sa position d’équilibre après environ 100 s.

À partir de cet instant, 250 mesures de tensions, avec un temps d’intégration de 200 ms, sont effectuées puis moyennées pour obtenir le courant « masse

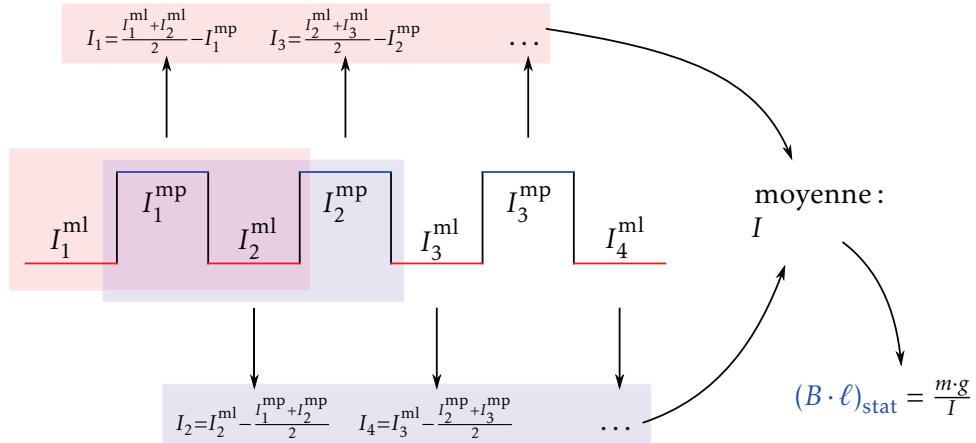


FIGURE 5.5 – Une séquence de phase statique est composée d’une succession d’équilibres « masse levée » (courant moyen  $I^{\text{ml}}$ ) et d’équilibres « masse posée » (courant moyen  $I^{\text{mp}}$ ). Le courant de pesée retenu, permettant la détermination du produit  $(B \cdot \ell)_{\text{stat}} = \frac{m \cdot g}{I}$ , est la moyenne des différences glissantes des courants.

posée »  $I^{\text{mp}} = \frac{U^{\text{mp}}}{R}$ , où  $R$  la résistance de référence (section 2.2.1 page 56). À l'issue de cette mesure, la masse est élevée de 1 mm (mesure « masse levée »), à la vitesse de  $10 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  et le processus est répété pour obtenir  $I^{\text{ml}} = \frac{U^{\text{ml}}}{R}$ .

Cette paire de mesures est typiquement répétée 10 fois (pour une durée d'environ 1 heure), et le courant  $I_j$  de pesée est déterminé (FIGURE 5.5) comme la différence d'un courant de pesée  $I^{\text{mp}}$  (respectivement  $I^{\text{ml}}$ ) à la moyenne des courants de pesée adjacents  $I^{\text{ml}}$  (respectivement  $I^{\text{mp}}$ ).

Enfin, le courant retenu pour la double pesée est la moyenne des valeurs précédentes :

$$I = \langle I_j \rangle. \quad (5.4)$$

L'incertitude de type A sur le courant  $I$  est évaluée en calculant l'incertitude-type expérimentale sur la moyenne des 18 courants mais en ne considérant que 6 déterminations indépendantes  $\left(\frac{s(I_j)}{\sqrt{6}}\right)$ .

La connaissance de la masse  $m$ , de l'accélération de la pesanteur  $g$  et la mesure du courant traversant la bobine lors d'une double pesée  $I$  permet alors d'évaluer le produit<sup>4</sup>  $(B \cdot \ell)_{\text{stat}} = \frac{m \cdot g}{I}$  à l'altitude  $z_0$ .

### 5.2.3 Détermination de la valeur de la constante de Planck

Réécrivons l'équation 1.44 page 26 liant la constante de Planck<sup>5</sup> à sa valeur conventionnelle  $h_{90}$  en faisant apparaître les déterminations du facteur géométrique en phase statique  $(B \cdot \ell)_{\text{stat}}$  et en phase dynamique  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}$  :

$$h = h_{90} \cdot \frac{(B \cdot \ell)_{\text{stat}}}{(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}}. \quad (5.5)$$

L'alternance des phases dynamique et statique a permis d'obtenir environ 650 déterminations de  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}$ , et 650 déterminations de  $(B \cdot \ell)_{\text{stat}}$  (FIGURE 5.6). Du fait de la dépendance en température des aimants en samarium-cobalt, valant approximativement  $-3 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ , les variations des valeurs des facteurs géométriques sont corrélées à la température. Les interruptions de ces courbes correspondent à des périodes d'arrêt de l'expérience, pour différentes vérifications, et notamment celle des mouvements de la bobine, comme mentionné au chapitre précédent. L'encart de la figure permet de constater que la dispersion des évaluations du facteur géométrique est plus importante en phase statique qu'en phase dynamique.

4. Ce facteur géométrique est déterminé par rapport au « système 90 », consulter à cet effet la page 23. Il se note en toute rigueur  $(B \cdot \ell)_{\text{stat}, 90} = \left(\frac{m \cdot g}{I_{90}}\right) = \left(\frac{m \cdot g}{\frac{U_{90}}{R_{90}}}\right)$ . Afin de ne pas surcharger les écritures, il sera noté ici  $(B \cdot \ell)_{\text{stat}} = \left(\frac{m \cdot g}{I}\right)$ .

5. En principe,  $\frac{(B \cdot \ell)_{\text{stat}}}{(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}} \equiv 1$  (égalité de puissance dans le SI), tandis que  $\frac{(B \cdot \ell)_{\text{stat}, 90}}{(B \cdot \ell)_{\text{dyn}, 90}} = \frac{h}{h_{90}}$ . Mais encore une fois, afin de ne pas hérissier les équations d'indices verbeux, nous omettrons définitivement la mention 90 à partir de ce point.

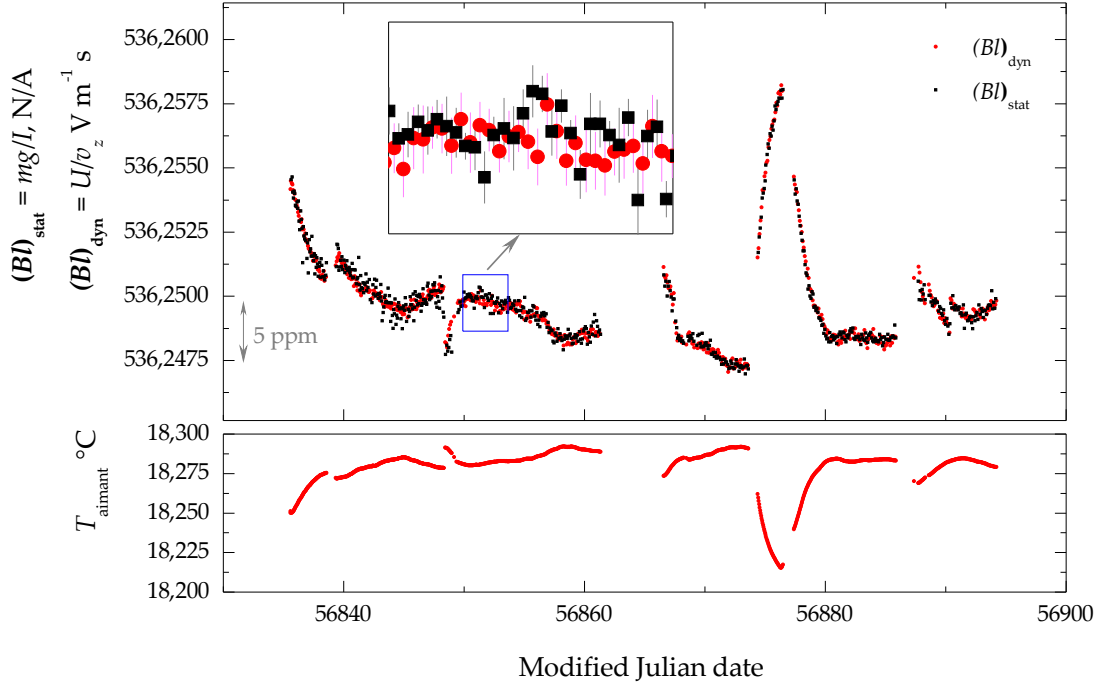


FIGURE 5.6 – Profils de champ  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}$  et  $(B \cdot \ell)_{\text{stat}}$  obtenus pendant l'été 2014. Leurs évolutions sont corrélées à la température du circuit magnétique, mais leur différences relatives restent constantes. Les incertitudes tracées sont une évaluation de type A.

Comme les phases statiques et dynamiques ne se déroulent pas au même instant (et s'effectuent donc à des températures différentes<sup>6</sup>), la détermination d'une valeur de  $h$ , à partir de l'équation 5.5, se fait à partir d'une interpolation linéaire des phases successives : on combine une détermination du profil de champ en phase dynamique (respectivement en phase statique) avec la moyenne de deux déterminations adjacentes du profil de champ en phase statique (respectivement en phase dynamique).

Ainsi, 1300 valeurs de constante de Planck ont été obtenues durant l'été 2014. Les résultats sont présentés à la FIGURE 5.7.

L'évaluation des incertitudes est effectuée à la section suivante.

### 5.3 Incertitudes et discussions

Pour cette première détermination de la valeur de la constante de Planck, l'incertitude-type combinée relative est de  $3,1 \times 10^{-7}$ , voir TABLE 5.1. Seules les incertitudes principales sont discutées ici.

6. Toutefois aucune différence de température systématique n'a pu être mise en évidence entre les deux phases (sonde à la résolution meilleure que le millikelvin).

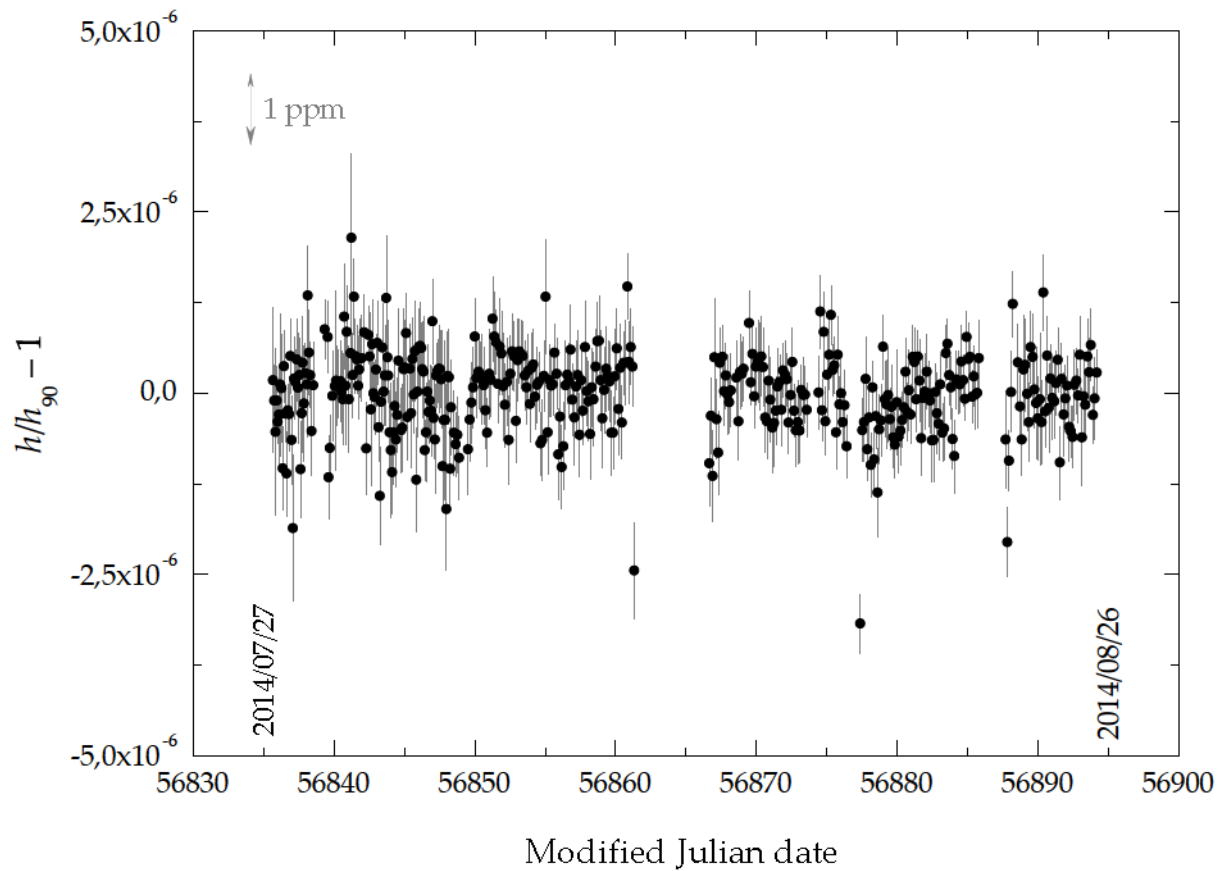


FIGURE 5.7 – Ensemble des déterminations de la valeur de constante de Planck obtenues durant l'été 2014 au LNE. Chaque point représente une détermination de  $h$ , l'incertitude associée à chacun des points est l'évaluation de l'incertitude de type A correspondante.

### 5.3.1 Incertitude de type A

L'incertitude-type relative de type A est considérée égale à l'incertitude d'Allan relative et est estimée à  $8 \times 10^{-8}$ .

### 5.3.2 Mesures de tension

Dans les deux phases, les voltmètres sont utilisés dans le calibre 1 V et étalonnés au moyen d'un étalon de tension Zener. La principale composante d'incertitude est due à la stabilité du gain des voltmètres et elle est évaluée à  $1,2 \times 10^{-7}$ . L'étalonnage de la diode Zener vis-à-vis d'un étalon de tension Josephson est assuré avec une incertitude-type relative de  $1,1 \times 10^{-8}$ , très inférieure à la précédente.



TABLE 5.1 – Principales sources d’incertitudes liées à la détermination de  $h$ . Incertitudes-types relatives, exprimées en  $10^{-9}$ .

Composante d’incertitude	Valeur ( $10^{-9}$ )
Type A	80
Tensions (phases statique et dynamique), $u_r(V_{90})$	240
Résistance, $u_r(\Omega_{90})$	6
Masse en alacrite (étalonnage, poussée d’Archimède, force magnétique), $u_r(m)$	66
Accélération de la pesanteur, $u_r(g)$	5
Comparateur de forces, $u_r(f)$	32
Vitesse (verticalité et indice de réfraction de l’air), $u_r(v_z)$	120
Puissance parasite $u_r(P)$	92
Autres contributions (effets de commutation, ajustement polynomial, délai de déclenchement, hystérésis des lames flexibles)	50
Incertitude-type combinée relative	310

Les mesures de tension dans les deux phases étant corrélées, leur contribution relative à l’incertitude de la valeur de constante de Planck est le double de  $1,2 \times 10^{-7}$  :  $u_r(V_{90}) = 2,4 \times 10^{-7}$ .

### 5.3.3 Phase statique

Le produit  $(B \cdot \ell)_{\text{stat}}$  est donné par le rapport du poids de la masse étalon au courant  $I$  injecté dans la bobine. Ce courant est mesuré par la chute de tension qu’il produit aux bornes d’une résistance de  $200 \, \Omega$  (la composante d’incertitude liée à la tension a été prise en compte dans la section 5.3.2).

#### 5.3.3.1 Résistance

La résistance, placé dans une enceinte thermo-régulée ( $\pm 10$  mK), est étalonnée par comparaison à un étalon de résistance à effet Hall quantique. L’incertitude-type relative est  $u_r(\Omega_{90}) = 6 \times 10^{-9}$ , dont les composantes sont

TABLE 5.2 – Sources d’incertitudes liées à la détermination de la résistance  $R$ . Incertitudes-types relatives, exprimées en  $\text{n}\Omega \cdot \Omega^{-1}$ .

Composante d’incertitude	Valeur ( $\text{n}\Omega \cdot \Omega^{-1}$ )
Étalonnage de la résistance par rapport à l’effet Hall quantique	4
Stabilité des résistances	5
Effet de la température	<1
Coefficient de puissance ( $0,8 \times 10^{-9}/\text{mW}$ )	<1
Dérive temporelle ( $0,2 \times 10^{-9}/\text{jour}$ )	<1
Incertitude-type combinée relative, $u_r(\Omega_{90})$	6

TABLE 5.3 – Sources d’incertitudes liées à la détermination de la masse  $m$ . Incertitudes-types relatives, exprimées en  $\text{ng} \cdot \text{g}^{-1}$ .

Composante d’incertitude	Valeur ( $\text{ng} \cdot \text{g}^{-1}$ )
Étalonnage de la masse $m$	32
Correction de la poussée d’Archimède	56
Correction de la force magnétique	11
Incertitude-type combinée relative, $u_r(m)$	66

données à la TABLE 5.2. La principale cause d’incertitude ( $5 \times 10^{-9}$ ) est liée à l’instabilité de la résistance lorsqu’elle est déplacée vers la salle où se trouve l’étalon de résistance à effet Hall quantique.

### 5.3.3.2 Masse en alacrite

Dans les années 1980, la masse volumique de l’étalon de masse en alacrite (section 2.1.7.2 page 55) a été évaluée au CNAM à  $\rho_{\text{alacrite}} = 9\,149,49(27) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

La détermination de la masse vraie  $m_{\text{alacrite}}$  de cet étalon par comparaison indirecte au prototype international du kilogramme  $\mathfrak{K}$ , a été effectuée par le département Masses et grandeurs associées du LNE avec une incertitude-type relative de  $3,2 \times 10^{-8}$ .

Il s’agit ensuite de déterminer la masse apparente  $m$  de l’étalon tel qu’utilisé dans la balance :

$$m = m_{\text{alacrite}} \cdot \left( 1 - \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{alacrite}}} \right) + C_{\chi} \quad (5.6)$$

où  $\rho_{\text{air}}$  est la masse volumique de l’air (et donc  $-\frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{alacrite}}}$  est la correction relative due à la poussée d’Archimède) et  $C_{\chi}$  la correction due à la force magnétique parasite s’exerçant sur l’alacrite.

La prise en compte de la correction due à la poussée d'Archimède, nécessite de calculer la masse volumique de l'air. Compte-tenu de l'incertitude-type de détermination des paramètres d'entrée (0,1 K pour la température, 10 Pa pour la pression, 0,015 pour l'humidité relative et  $2 \times 10^{-4}$  pour la concentration de  $\text{CO}_2$ ), l'incertitude sur la densité de l'air, déterminée par les équations CIPM-2007 [203] est de  $5,4 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Conjugué à l'incertitude associée à la densité de l'Alacrite, ceci correspond à une incertitude-type relative sur la masse  $m$  de  $5,6 \times 10^{-8}$  associée à la poussée d'Archimède.

De plus, la susceptibilité magnétique de l'alacrite ( $\chi_m = 1,34 \times 10^{-3}$ ) introduit une correction de masse de 37  $\mu\text{g}$  dont l'incertitude-type a été évaluée à  $1,1 \times 10^{-8}$  en valeur relative (détermination effectuée à la section 3.1 page 70).

Finalement, ces contributions conduisent à une incertitude-type relative sur la détermination de la masse  $m$  de 500 g en alacrite de  $u_r(m) = 6,6 \times 10^{-8}$  (TABLE 5.3).

Il faut noter que cette valeur de  $h$  ne prend pas en compte la correction de l'étalon primaire de masse français (n° 35) due à la dérive de 35  $\mu\text{g}$  de l'unité de masse maintenue au BIPM (cette dérive a été découverte lors de l'étalonnage extraordinaire de 2014 [204]). La correction associée serait de  $-3,7 \times 10^{-9}$ , avec une incertitude-type relative de  $3 \times 10^{-9}$  : ceci est négligeable par comparaison à l'incertitude globale.

### 5.3.3.3 Accélération de la pesanteur

La valeur de  $g$  fournie par l'équipe SYRTE-LNE – selon le processus décrit à la section 2.1.7.1 page 55 – permet de déterminer la valeur absolue de l'accélération de la pesanteur au point où se situe la masse étalon, avec une incertitude-type relative de  $u_r(g) = 5 \times 10^{-9}$ .

### 5.3.3.4 Comparateur de forces

Comme développé à la section 3.3 page 77, l'horizontalité des pivots du fléau est critique. En effet, pour une position non-horizontale, les forces horizontales parallèles à l'axe longitudinal du fléau introduisent une erreur systématique dans la comparaison des forces électromagnétique et gravitationnelle.

L'écart à l'horizontalité des pivots du fléau a été estimé à  $\alpha = 3 \times 10^{-3} \text{ rad}$  (section 3.3.3 page 90).

Ces forces parasites longitudinales ont été minimisées et évaluées à un maximum de  $20 \times 10^{-6}$  en valeur relative à  $F_z = 4,9 \text{ N}$  (consulter pour le principe de cette détermination<sup>7</sup> le chapitre 4 et pour l'application à cette campagne de mesure la section 4.5 page 131).

7. Les notations du chapitre précédent sont différentes : les forces et moments parasites  $F_x$  de la phase statique y étaient désignés par  $\Delta F_x^{\text{stat}}$ .

Le produit de ces deux dernières valeurs ( $6 \times 10^{-8}$ ) donne l'erreur maximale de comparaison de forces du fléau. En supposant une distribution rectangulaire, sa contribution à l'incertitude-type relative sur la valeur de la constante de Planck est donc de  $u_r(f) = 3,2 \times 10^{-8}$ .

### 5.3.4 Phase dynamique

Le produit  $(B \cdot \ell)_{\text{dyn}}$  est donné par le rapport de la tension induite aux bornes de la bobine par sa vitesse verticale, lors de la translation verticale de la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique.

La composante d'incertitude liée à la tension a été prise en compte dans la section 5.3.2.

Concernant la vitesse, les deux principales sources d'incertitude sont la verticalité des faisceaux lasers des interféromètres et la détermination de l'indice de l'air.

La verticalité des trois faisceaux des interféromètres a été évaluée dans la gamme de  $\pm 350 \mu\text{rad}$  (détermination effectuée en section 3.2 page 73), ce qui correspond à une incertitude-type relative sur la détermination de la vitesse de  $6 \times 10^{-8}$ .

L'incertitude-type relative sur la détermination de l'indice de l'air [202], obtenue à partir des incertitudes sur les paramètres d'entrée (0,1 K pour la température, 10 Pa pour la pression, 0,015 pour l'humidité relative et  $2 \times 10^{-4}$  pour la concentration de  $\text{CO}_2$ ) est de  $1 \times 10^{-7}$ .

Au total, l'incertitude-type relative sur la détermination de la vitesse est donc de  $u_r(v_z) = 1,2 \times 10^{-7}$ .

### 5.3.5 Erreur de puissance

L'erreur de puissance mesurée due aux forces et aux vitesses parasites (voir le paragraphe b. page 18) vaut en terme relatif :

$$\epsilon_P = \frac{F_x}{F_z} \cdot \frac{v_x}{v_z} + \frac{F_y}{F_z} \cdot \frac{v_y}{v_z} + \frac{M_x}{F_z} \cdot \frac{\omega_x}{v_z} + \frac{M_y}{F_z} \cdot \frac{\omega_y}{v_z} + \frac{M_z}{F_z} \cdot \frac{\omega_z}{v_z}. \quad (5.7)$$

Par le processus décrit dans le chapitre précédent, les forces ( $F_x, F_y$ ) et moments ( $M_x, M_y, M_z$ ) parasites s'exerçant sur la bobine lors des phases statiques de la campagne de mesure de l'été 2014 ont été évaluées<sup>8</sup>. Ces valeurs sont données en section 4.5 page 131 et sont reportées en terme relatif à  $F_z = 4,9 \text{ N}$  dans la TABLE 5.4.

Les vitesses parasites linéaires ( $v_x, v_y$ ) et angulaires ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ) ont été mesurées à chaque trajectoire de la bobine par les capteurs de position gaussien et les 3 interféromètres : ces vitesses, moyennées sur les 100 trajectoires

8. Les notations du chapitre précédent sont différentes : les forces et moments parasites ( $F_x, F_y, M_x, M_y, M_z$ ) y étaient désignés par  $(\Delta F_x^{\text{stat}}, \Delta F_y^{\text{stat}}, \Delta M_x^{\text{stat}}, \Delta M_y^{\text{stat}}, \Delta M_z^{\text{stat}})$ .

TABLE 5.4 – Détermination de l’incertitude-type relative liée à l’erreur de puissance. Elle se calcule comme le produit des forces et moments parasites relatifs à  $F_z = 4,9$  N par les vitesses linéaires et angulaires parasites relatives à  $v_z = 2 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Forces et moments parasites relatifs		Vitesses linéaires et angulaires parasites relatives		Puissances parasites relatives	
$\left  \frac{F_x}{F_z} \right $	$< 20 \times 10^{-6}$	$\left  \frac{v_x}{v_z} \right $	$< 2 \times 10^{-3}$	$\left  \frac{F_x}{F_z} \right  \cdot \left  \frac{v_x}{v_z} \right $	$< 45 \times 10^{-9}$
$\left  \frac{F_y}{F_z} \right $	$< 50 \times 10^{-6}$	$\left  \frac{v_y}{v_z} \right $	$< 1,5 \times 10^{-3}$	$\left  \frac{F_y}{F_z} \right  \cdot \left  \frac{v_y}{v_z} \right $	$< 75 \times 10^{-9}$
$\left  \frac{M_x}{F_z} \right $	$< 10 \times 10^{-6} \text{ m}$	$\left  \frac{\omega_x}{v_z} \right $	$< 1 \times 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$	$\left  \frac{M_x}{F_z} \right  \cdot \left  \frac{\omega_x}{v_z} \right $	$< 10 \times 10^{-9}$
$\left  \frac{M_y}{F_z} \right $	$< 20 \times 10^{-6} \text{ m}$	$\left  \frac{\omega_y}{v_z} \right $	$< 1 \times 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$	$\left  \frac{M_y}{F_z} \right  \cdot \left  \frac{\omega_y}{v_z} \right $	$< 20 \times 10^{-9}$
$\left  \frac{M_z}{F_z} \right $	$< 10 \times 10^{-6} \text{ m}$	$\left  \frac{\omega_z}{v_z} \right $	$< 1 \times 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$	$\left  \frac{M_z}{F_z} \right  \cdot \left  \frac{\omega_z}{v_z} \right $	$< 10 \times 10^{-9}$
				Erreur de puissance	$< 160 \times 10^{-9}$
				$u_r(P)$	$92 \times 10^{-9}$

d’une phase dynamique ont des valeurs de plus de 2 ordres de grandeurs supérieures aux vitesses transverses du système de guidage. Ceci s’explique sans doute par l’inclinaison des faisceaux des capteurs gaussiens et des interféromètres sur la verticale. Nous prendrons donc les vitesses mesurées comme des majorants, pour obtenir (respectivement pour  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$ ) :  $4 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $3 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $2 \mu\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $2 \mu\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $2 \mu\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On reporte ces vitesses linéaires et angulaires parasites dans la TABLE 5.4, relativement à  $v_z = 2 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

La multiplication des termes parasites relatifs terme-à-terme permet d’obtenir les composantes individuelles du terme d’erreur de puissance, dont la valeur maximale est  $1,6 \times 10^{-7}$  (TABLE 5.4). Si on associe à la puissance parasite totale une distribution rectangulaire, l’incertitude-type relative associée est  $u_r(P) = 9,2 \times 10^{-8}$ .

## 5.4 Conclusion

La valeur de la constante de Planck extraite des données obtenues lors de l’été 2014 et son incertitude-type associée sont :

$$\text{LNE-2014} \quad \begin{cases} h = 6,626\,068\,8(20) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} & [3,1 \times 10^{-7}] \\ \frac{h}{h_{90}} - 1 = 0(31) \times 10^{-8} \end{cases} \quad (5.8)$$

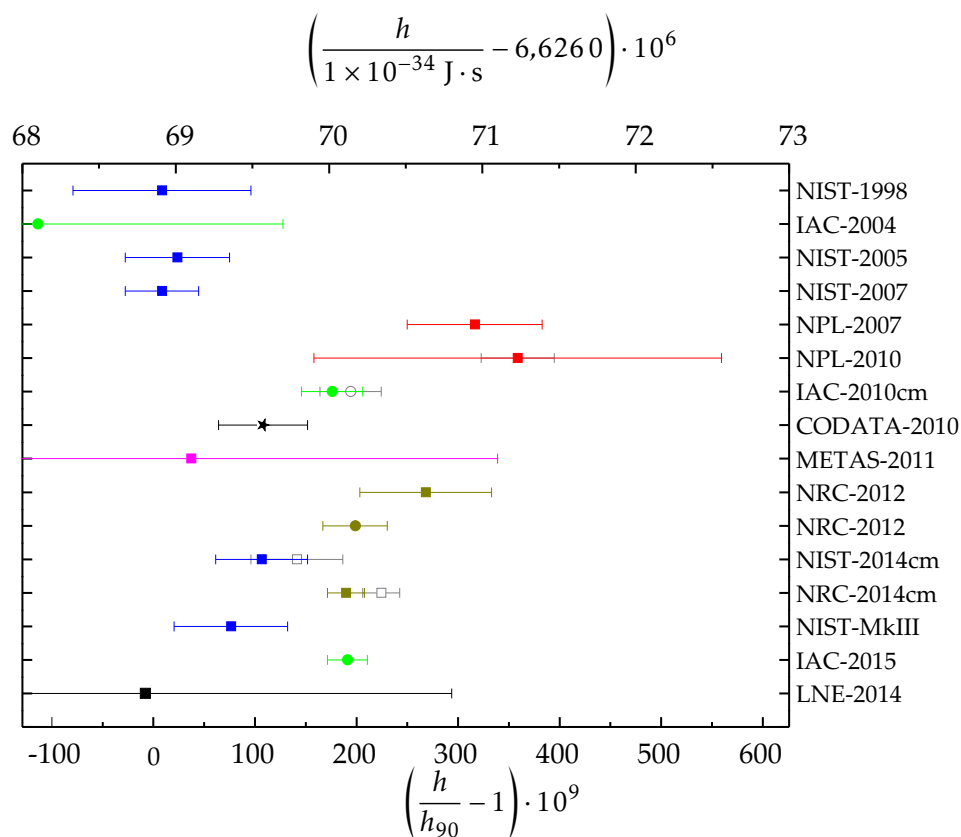
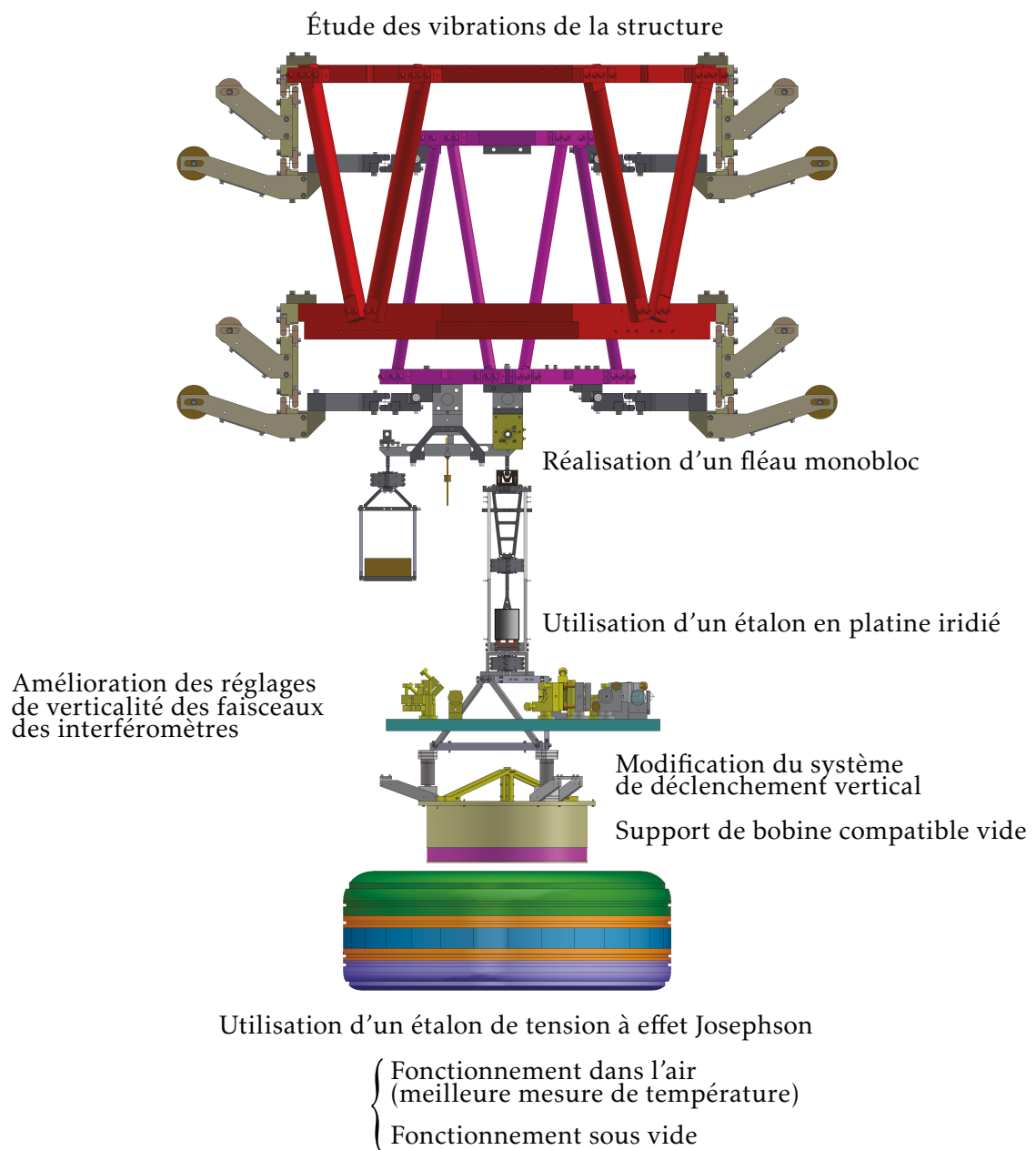


FIGURE 5.8 – Représentation de la détermination de la valeur de la constante de Planck par le LNE en 2014, accompagnée des dernières valeur de la constante de Planck (déterminations au moyen d’une balance du watt ou par XRCD), de même que la valeur recommandée CODATA de 2010. Chaque laboratoire est identifié par une couleur, les déterminations de constante de Planck au moyen d’une balance du watt par un carré, et par XRCD par un cercle. Les données en gris représentent les valeurs publiées avant que ne soit connue l’erreur sur l’unité de masse maintenue au BIPM. Pour NPL–2010, les barres grises représentent l’incertitude estimée avant la découverte d’une erreur liée à l’échangeur de masse. La valeur la plus récente est celle décrite dans ce chapitre.

Cette valeur diffère en terme relatif de la valeur recommandée CODATA 2010 [51] de  $1,1 \times 10^{-7}$  : elle est représentée avec les autres déterminations de  $h$  à la FIGURE 5.8.



Après une conclusion récapitulant les travaux effectués, nous donnons les perspectives à l'issue de cette thèse. L'expérience de la balance du watt du LNE n'a pas atteint ses limites, et de nombreuses améliorations sont prévues pour réduire chacune des composantes de l'incertitude. Les plus significatives à moyen terme sont le **fonctionnement de la balance du watt sous vide** (et donc la réalisation d'un **support de bobine compatible vide**), l'utilisation d'un **étalon de tension à effet Josephson**, l'utilisation d'un **étalon de masse en platine iridié** et la réalisation d'un **fléau monobloc**. Enfin, la procédure de détermination de la **verticalité des faisceaux des interféromètres** décrite au chapitre 3 sera utilisée pour effectuer ce réglage.

---

## Conclusion & perspectives

---

Dans l'optique d'une modification du SI fondée sur les constantes fondamentales de la physique, le LNE a développé une expérience de balance du watt, de manière à participer à la redéfinition de l'unité de masse. Celle-ci est en effet la dernière des unités de base du SI qui repose encore sur un artefact matériel : le prototype international du kilogramme.

Après une dizaine d'années de développements séparés des différents éléments, de très nombreuses caractérisations et améliorations, les premiers travaux de cette thèse ont consisté en l'assemblage des sous-ensembles de la balance du watt.

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'évaluation des composantes principales d'incertitudes et notamment à celles liées aux problématiques d'alignement.

L'incertitude-type relative sur la détermination de la vitesse verticale de la bobine du fait de l'inclinaison des faisceaux des interféromètres a été évaluée à  $6 \times 10^{-8}$ . Par le processus décrit au chapitre 3, celle-ci pourra être réduite à  $5 \times 10^{-9}$ . L'alignement sur l'horizontale des pivots du comparateur de forces a été déterminé à 3 mrad. Compte-tenu de la valeur des forces parasites parallèles à l'axe longitudinal du fléau, cela se traduit par une incertitude-type relative de  $3,2 \times 10^{-8}$  dans la comparaison des forces gravitationnelle et électromagnétique.

Nous avons montré dans le chapitre 4 qu'il était possible de réduire le mouvement de la bobine entre les deux équilibres de la double pesée à moins que  $1 \mu\text{m}$  et à moins que  $1 \mu\text{rad}$ . Les forces parasites perpendiculaires à l'axe longitudinal du fléau ont été estimées par deux méthodes différentes et sont compatibles si on tient compte d'un moment vertical s'exerçant sur la bobine. Enfin, ces forces et moments parasites déterminés lors des phases statiques (combinées aux vitesses parasites mesurées lors des phases dynamiques) conduisent à une erreur de puissance induisant une incertitude-type relative sur  $h$  de  $9,2 \times 10^{-8}$ .

Les mesures de la valeur de la constante de Planck effectuée lors de l'été 2014 permettent une première évaluation des performances de la balance du watt du LNE. Celles-ci ont été effectuées dans l'air : l'incertitude-type relative sur la détermination de  $h$  due à la correction de l'indice de l'air est de  $1 \times 10^{-7}$ , tandis que celle liée à la correction de la poussée d'Archimède



est de  $5,6 \times 10^{-8}$ . De plus, les mesures de tensions étaient réalisées par des voltmètres étalonnés par comparaison à une diode Zener : ceci implique une incertitude-type relative de  $2,4 \times 10^{-7}$ .

Néanmoins, la valeur de la constante de Planck déterminée,  $h = 6,626\,068\,8(20) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , est affectée d'une incertitude-type relative de  $3,1 \times 10^{-7}$ . En sus des incertitudes liées à l'air et à la référence de tension (dont la somme quadratique est  $2,7 \times 10^{-7}$ ), les éléments contribuant le plus significativement à cette incertitude sont la puissance parasite ( $8,2 \times 10^{-8}$ ) et les incertitudes de type A ( $8 \times 10^{-8}$ , estimées par la valeur de l'écart-type d'Allan sur une durée d'un mois).

L'expérience n'a donc pas encore atteint ses limites, et de nombreuses améliorations sont prévues pour réduire chacune des composantes de l'incertitude. Ainsi :

- Les mesures de tension durant la phase dynamique et la phase statique seront prochainement effectuées directement par opposition à une tension définie par un réseau Josephson programmable [112, 205] disponible au laboratoire. Il s'agit d'un réseau binaire fourni par la PTB, composé de 14 sections constituant un convertisseur numérique analogique de 14 bits de résolution. Grâce à ce système, les mesures de tensions vont consister en la détermination de la différence entre la tension Josephson et la tension de mesure inconnue, au moyen des voltmètres utilisés en détecteur de zéro. Ainsi, l'incertitude-type relative associée aux mesures de tension est espérée à quelques  $10^{-8}$ .
- Un nouveau fléau monobloc a été réalisé : la bonne connaissance de la position de ses points de pivot (alignés par construction) permettra de réduire l'effet des forces horizontales tandis que sa large lame ajourée centrale réduira son mouvement de lacet.
- La verticalité des faisceaux des interféromètres (et des capteurs de position) sera déterminée et ajustée par la méthode exposée en section 3.2 : sa contribution à l'incertitude générale sera alors diminuée d'un facteur 10 ou plus. Le terme d'erreur de puissance sera également diminué de la même quantité, du fait de la diminution des vitesses parasites mesurées.
- Une autre masse étalon (Johnson-Matthey), sera utilisée pour la prochaine campagne de mesure. Sa densité ( $21\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) plus élevée que celle de l'Alacrite, et sa susceptibilité magnétique ( $2,4 \times 10^{-4}$ ) plus faible permettront de l'utiliser dans l'air et à proximité du circuit magnétique avec une incertitude significativement réduite. Par ailleurs, le comportement surfacique de cet alliage utilisé depuis 130 ans pour fabriquer des prototypes de kilogramme a été étudié par de nombreux instituts métrologiques nationaux. Sa stabilité en masse est suffisamment connue pour modéliser son évolution à court et long termes dans l'air.

- L'étude des gradients de température à l'intérieur de la balance du watt devrait permettre d'appliquer la correction de la poussée d'Archimède sur la masse en platine iridié et de l'indice de l'air avec une incertitude réduite d'un facteur 2.

À moyen terme, la balance fonctionnera sous vide. La difficulté est de s'assurer du fonctionnement du système *in vacuo*, et de la pérennité des réglages effectués dans l'air. Les bénéfices immédiats sont la suppression de la correction de la poussée d'Archimède et de l'indice de l'air. Le régime de vibrations mécaniques de la balance risque d'être modifié, tandis que l'amortissement des oscillations de la bobine sera très certainement diminué. L'essentiel des éléments placés dans l'enceinte de la balance du watt sont compatibles avec une utilisation sous vide, à l'exception du support de la bobine (constitué de Delrin, un polymère de la famille des polyacétal). Nous nous emploierons donc à modifier la bobine et son support :

- Un nouveau support de bobine sera fabriqué, à partir de PEEK (poly-étheréthercétone), l'une des rares matières plastiques adaptée à une utilisation sous vide.
- De nouveaux rétroreflecteurs (bras de mesure des interféromètres) de plus grande dimension seront utilisés (en passant de 9 mm à 14 mm de diamètre).
- Une modification du système de détection de la position verticale de la bobine sera effectuée, permettant une plus grande course de la bobine dans l'entrefer du circuit magnétique mais également une meilleure répétabilité du point de démarrage des mesures en phase dynamique.
- La structure métallique de la bobine sera allégée.

Actuellement le moteur pas-à-pas dispose de sa propre boucle d'asservissement utilisant un codeur linéaire. À l'avenir, l'asservissement du moteur pas-à-pas pourra se faire directement depuis les signaux des 3 interféromètres (avec un deuxième étage d'asservissement sur les cristaux piézo-électriques placés sur le pourtour de la bobine). Un autre système de mesure de la vitesse de la bobine sera réalisé : il s'agira de déterminer directement la fréquence hétérodynée des interféromètres.

Enfin, l'étude des régimes de vibration de la balance du watt est prévue pour réduire le type A.

Ainsi, notre objectif est de réduire chacune des composantes d'incertitudes à une valeur relative inférieure à  $5 \times 10^{-8}$  pour obtenir une incertitude-type relative de  $1 \times 10^{-7}$  en fin d'année 2015. Une incertitude-type relative de  $5 \times 10^{-8}$  est visée pour 2017.

Si la réforme du Système international d'unités est adoptée, la balance du watt changera de finalité : il s'agira alors de réaliser l'unité de masse à partir de la valeur fixée de la constante de Planck. L'objectif serait alors de réaliser routinièrement la définition du kilogramme avec une incertitude-type relative

inférieure ou égale à  $5 \times 10^{-8}$ . Ainsi, la comparaison à d'autres balances du watt permettra de s'assurer de la robustesse des réalisations du kilogramme par différents instituts nationaux de métrologie.

---

## Annexe A

# Système international d'unités

---

### A.1 Le SI en 2015

Les sept unités de base du Système international sont les unités à partir desquelles sont obtenues par analyse dimensionnelle toutes les autres unités, dites « unités dérivées ».

Ces unités de base sont supposées indépendantes dans la mesure où elles permettent de mesurer des grandeurs physiques indépendantes. Cependant la définition d'une unité de base peut faire appel à d'autres unités de base.

La TABLE A.1 page suivante donne les définitions de ces unités, et la FIGURE A.1 page 158 les relations entre celles.

### A.2 La proposition de refonte du SI

En 2011, la CGPM [63] prend acte de la volonté du CIPM de proposer une révision du SI. Celle-ci prévoit notamment :

- Que les nouvelles définitions du kilogramme, de l'ampère, du kelvin et de la mole seront rédigées en utilisant une formulation dite « à constante explicite », c'est-à-dire une définition dans laquelle l'unité est définie indirectement en donnant explicitement une valeur exacte à une constante fondamentale ;
- Et que l'intelligibilité du Système international d'unités soit renforcée en utilisant la même formulation pour toutes ses unités de base.

La TABLE A.2 page 157 donne les propositions des définitions des unités de base, et la FIGURE A.2 page 159 les relations entre ces unités.

Unité	Symbole	Définition de l'unité
mètre	m	Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée $1/299\,792\,458$ de seconde (1983 [9, 206]). <i>Il en résulte que la vitesse de la lumière dans le vide, <math>c</math>, est égale à <math>299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}</math> exactement.</i>
kilogramme	kg	Le kilogramme est l'unité de masse ; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme (1901 [7]). <i>Il en résulte que la masse du prototype international du kilogramme, <math>m(\text{K})</math>, est toujours égale à 1 kg exactement.</i>
seconde	s	La seconde est la durée de $9\,192\,631\,770$ périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium-133 (1967-1968 [42, 207]). <i>Il en résulte que la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium-133, <math>\nu(\text{Cs})_{\text{hfs}}</math>, est égale à <math>9\,192\,631\,770 \text{ Hz}</math>.</i>
ampère	A	L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueurs infinies, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 m l'un de l'autre dans le vide, produirait une force égale à $2 \times 10^{-7}$ newton par mètre de longueur (1948 [35]). <i>Il en résulte que la constante magnétique, <math>\mu_0</math>, aussi connue sous le nom de perméabilité du vide, est égale à <math>4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}</math> exactement.</i>
kelvin	K	Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction $1/273,16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau (1967-1968 [42, 207]). <i>Il en résulte que la température thermodynamique du point triple de l'eau, <math>T_{\text{tpw}}</math>, est égale à 273,16 K exactement.</i>
mole	mol	La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone-12 ; son symbole est « mol » (1971 [16, 208]). <i>Il en résulte que la masse molaire du carbone 12, <math>m(^{12}\text{C})</math>, est égale à 0,012 kilogramme par mole exactement</i>
candela	cd	La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12} \text{ Hz}$ et dont l'intensité énergétique dans cette direction est $1/683$ watt par stéradian (1979, [36, 209]). <i>Il en résulte que l'efficacité lumineuse spectrale, <math>K</math>, d'un rayonnement monochromatique de fréquence <math>540 \times 10^{12} \text{ Hz}</math> est égale à <math>683 \text{ cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{W}^{-1}</math> exactement.</i>

TABLE A.1 – Définition des sept unités de base du SI d'après [5], définies de 1901 (kilogramme) à 1983 (mètre).

Unité	Définition de l'unité
mètre <sup>°</sup>	Le mètre, symbole m, est l'unité de longueur ; son amplitude est déterminée en fixant la valeur numérique de la vitesse de la lumière dans le vide à exactement 299 792 458 lorsqu'elle est exprimée en unité du SI $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
kilogramme <sup>*</sup>	Le kilogramme, symbole kg, est l'unité de masse ; son amplitude est déterminé en fixant la valeur numérique de la constante de Planck à exactement $6,626\,06 \dots \times 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en $\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , unité du SI égale au joule seconde, $\text{J} \cdot \text{s}$ .
seconde <sup>°</sup>	La seconde, symbole s, est l'unité de temps ; son amplitude est déterminée en fixant la valeur numérique de la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium-133 au repos, à une température de 0 K, à exactement 9 192 631 770 lorsqu'elle est exprimée en $\text{s}^{-1}$ , unité du SI égale au hertz, Hz.
ampère <sup>*</sup>	L'ampère, symbole A, est l'unité de courant électrique ; son amplitude est déterminée en fixant la valeur numérique de la charge élémentaire à exactement $1,602\,17 \dots \times 10^{-19}$ lorsqu'elle est exprimée en $\text{s} \cdot \text{A}$ , unité du SI égale au coulomb, C.
kelvin <sup>*</sup>	Le kelvin, symbole K, est l'unité de température thermodynamique ; son amplitude est déterminée en fixant la valeur numérique de la constante de Boltzmann à exactement $1,380\,6 \dots \times 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en $\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ , unité du SI égale au joule par kelvin, $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ .
mole <sup>*</sup>	La mole, symbole mol, est l'unité de quantité de matière d'une entité élémentaire spécifique, c'est-à-dire un atome, une molécule, un ion, un électron, ou toute autre particule ou groupe particulier de telles particules ; son amplitude est déterminée en fixant la valeur numérique de la constante d'Avogadro à exactement $6,022\,14 \dots \times 10^{23}$ lorsqu'elle est exprimée en unité du SI $\text{mol}^{-1}$ .
candela <sup>°</sup>	La candela, symbole cd, est l'unité d'intensité lumineuse dans une direction donnée ; son amplitude est déterminée en fixant la valeur numérique de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique d'une fréquence de $540 \times 10^{12}$ Hz à exactement 683 lorsqu'elle est exprimée en $\text{m}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{cd} \cdot \text{sr}$ ou en $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{W}^{-1}$ , unité du SI égale au lumen par watt, $\text{lm} \cdot \text{W}^{-1}$ .

TABLE A.2 – Définition des sept unités de base proposées pour le futur du SI, d'après [63]. Les définitions des unités suivies d'un cercle (°) seraient reformulées d'une manière complètement équivalente à leur précédente définition (TABLE A.1 page précédente), mais à « constante explicite ». Les unités suivies d'une étoile (\*) pourront faire l'objet d'une redéfinition dont les valeurs numériques exactes restent à déterminer.

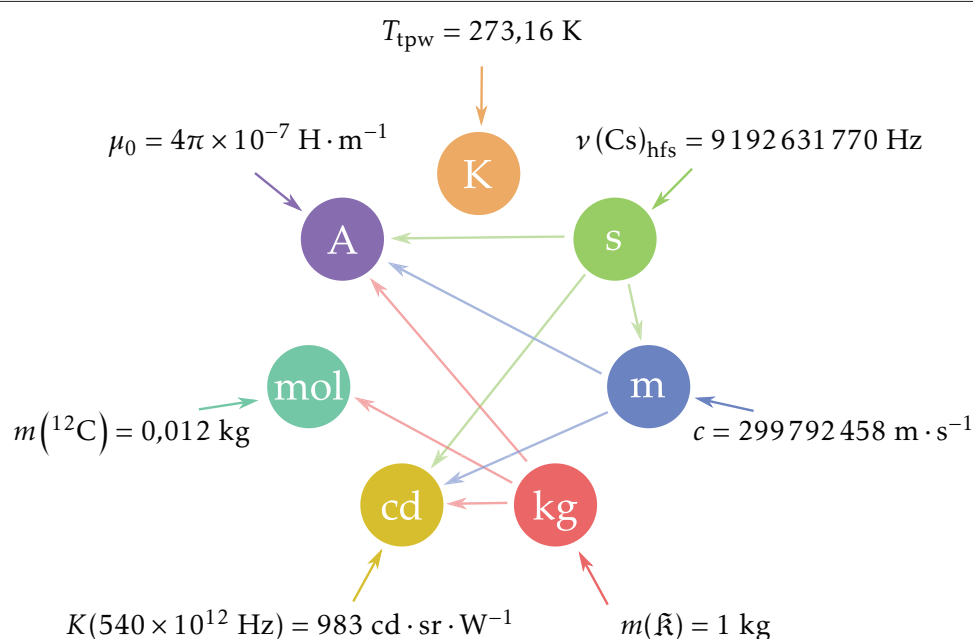


FIGURE A.1 – Interdépendance entre les unités de base du SI en 2015 et phénomènes physiques (ou artefact) les définissant. En sens horaire à partir du haut, on retrouve le kelvin (température), la seconde (temps), le mètre (distance), le kilogramme (masse), le candela (intensité lumineuse), la mole (quantité de matière) et l'ampère (courant électrique). L'examen des définitions de l'ampère, de la mole et du candela (TABLE A.1) montre qu'elles reposent toutes trois sur celle du kilogramme et que par conséquent elles sont liées à la masse du prototype international du kilogramme (ce qu'indiquent les flèches rouges).

---

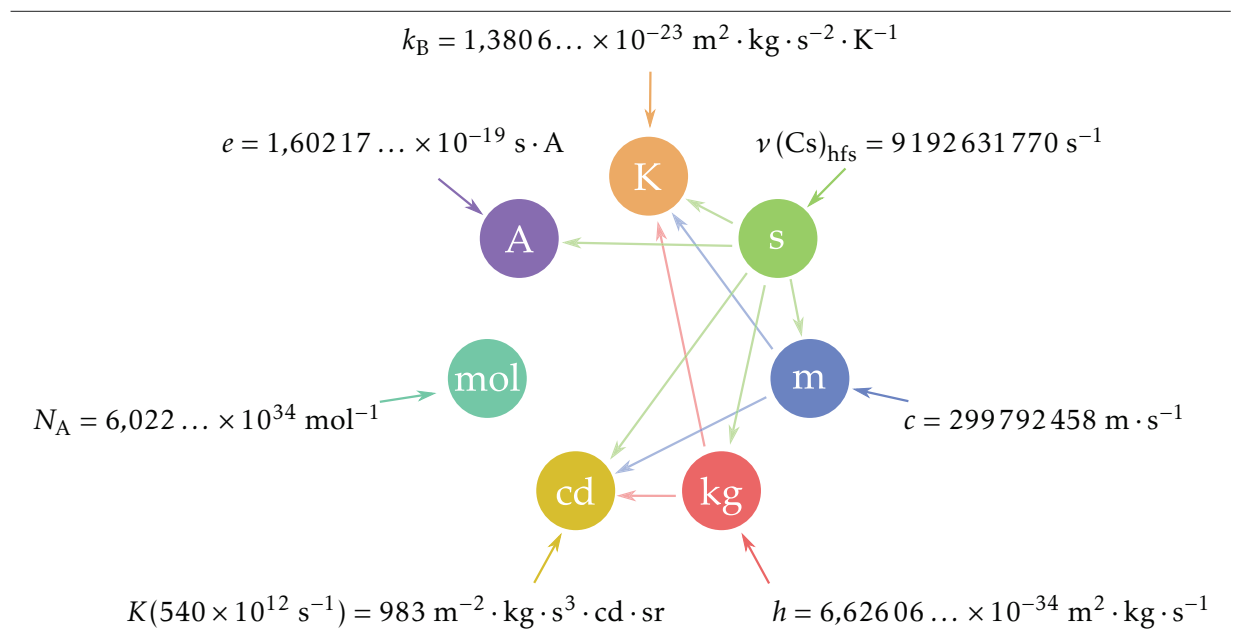


FIGURE A.2 – Interdépendance entre les unités de base du « nouveau » SI et constantes physiques les définissant. En sens horaire à partir du haut, on retrouve le kelvin (température), la seconde (temps), le mètre (distance), le kilogramme (masse), le candela (intensité lumineuse), la mole (quantité de matière) et l'ampère (courant électrique). L'examen des définitions du kelvin et du candela (TABLE A.2) montre qu'elles reposent toutes deux notamment sur celle du kilogramme et que par conséquent elles sont liées à valeur de la constante de Planck (ce qu'indiquent les flèches rouges). Toutes les unités de base, à l'exception de la mole, dépendent de la seconde, l'unité réalisée avec la plus faible incertitude.

---





---

## Annexe B

# Détermination des caractéristiques métrologiques du codeur linéaire

---

La réponse des capteurs gaussiens a été établie à la section 3.4.6.1 page 100 au moyen du dispositif représenté à la FIGURE 3.25 page 101.

Ce dispositif utilise un codeur linéaire commercial (résolution 20  $\mu\text{m}$ , interpolé 2000 fois) de la société HEIDENHAIN dont nous vérifions ici les propriétés métrologiques.

L'objectif de cette section est d'étalonner le déplacement effectif de la lame métallique en fonction de l'information de distance donnée par le codeur linéaire optique.

Les spécifications de cette règle précisent notamment une erreur de linéarité inférieure à 1,5  $\mu\text{m}$  sur la longueur de la règle (« justesse »), et une erreur cyclique inférieure à 0,15  $\mu\text{m}$  (« micro-justesse »)

### B.1 Dispositif expérimental

Le suivi du déplacement de la lame métallique est assuré par un interféromètre hétérodyne double passage, pour lequel le miroir mobile est solidaire de l'extrémité du dispositif d'étalonnage supportant la lame.

Les deux bras de l'interféromètre ainsi que le dispositif d'étalonnage sont placés dans une enceinte fermée de manière à limiter les effets de la convection de l'air.

La valeur de l'indice de l'air a été estimée à partir de la formule [203]. On admettra que cette valeur est entachée d'une incertitude-type relative de  $1 \times 10^{-6}$  dans les conditions de mesure. Le déplacement total de la règle étant de 40 mm, l'erreur résultante équivaut à 40 nm lors d'une trajectoire complète. Sur la distance utile à l'étalonnage (1 cm), cette incertitude est négligeable.

La colinéarité de l'axe de déplacement de la lame et de l'axe du faisceau laser de mesure a été réglée et mesurée à mieux que 1 mrad à l'aide d'un photodétecteur 2D. Le déplacement total de la règle étant de 40 mm, l'erreur résultante en cosinus équivaut à 20 nm lors d'une trajectoire complète. Sur la distance utile à l'étalonnage (1 cm), cette incertitude est négligeable.

## B.2 Justesse du codeur linéaire

La première vérification effectuée consiste en la comparaison de la variation de la distance mesurée par l'interféromètre et de la variation de distance telle que donnée par le codeur linéaire.

Le moteur assure donc le déplacement le long de la règle sur une distance de 40 mm, par pas de 20  $\mu\text{m}$  (nous verrons plus bas la raison de ce choix d'incrément) : le trajet complet nécessite environ deux heures. On a représenté à la FIGURE B.1 la différence d'indication de l'interféromètre à l'indication de la règle lors d'un aller et retour.

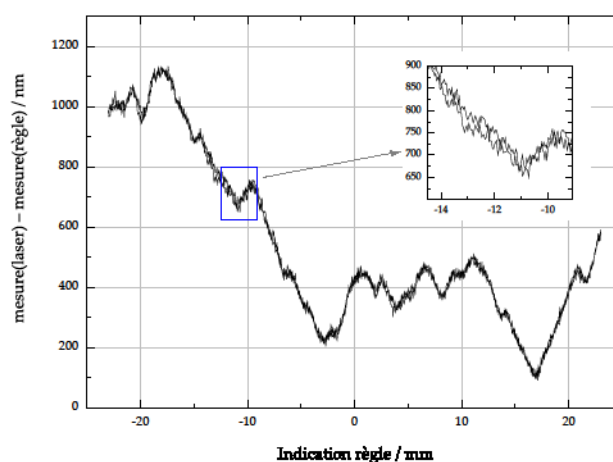


FIGURE B.1 – Erreur de justesse du codeur linéaire pour un aller-retour sur la totalité de la règle. L'encart permet de constater que le bruit de mesure de la distance par l'interféromètre est d'environ 10 nm ( $1\sigma$ ).

L'erreur maximale que l'on peut commettre en se fiant à la justesse de la règle est de 1  $\mu\text{m}$  (écart de +1 100 nm à l'abscisse -18 mm et écart de +100 nm à l'abscisse +17 mm).

Toutefois, si on se donne 1 cm comme distance maximale d'utilisation de cette règle (on souhaite en effet étalonner les capteurs gaussiens sur quelque millimètres), l'erreur maximale tombe à 0,7  $\mu\text{m}$ .

Il faut alors utiliser la FIGURE B.1 comme une correction : la répétabilité de cette courbe a été estimée à 50 nm ( $1\sigma$ ) par comparaison de mesures répétées. C'est donc l'incertitude-type résiduelle après correction.

### B.3 Microjustesse du codeur linéaire

La règle utilisée est gravée au pas de  $20\text{ }\mu\text{m}$  : ce signal est interpolé ensuite 2000 fois : l'incrément élémentaire (qui est l'unité de mesure de la règle) est donc de  $10\text{ nm}$ .

Le paragraphe précédent établissait l'erreur de justesse de la règle en annulant l'erreur d'interpolation : à cette fin, nous avons parcouru la totalité de la règle par pas de  $20\text{ }\mu\text{m}$ , ou plus exactement en cherchant à obtenir des déplacements de 2000 incréments élémentaires. De cette façon, on a pu caractériser les écarts de la gravure aux  $20\text{ }\mu\text{m}$  nominaux sur toute la longueur de la règle.

À présent, nous allons étudier une petite section de la règle (quelques centaines de micromètres, FIGURE B.2) que nous allons parcourir par des déplacements de 20 incréments élémentaires (soit  $200\text{ nm}$ ). Un déplacement aussi faible est mal aisé à obtenir et en pratique nous avons imposé des déplacements de 20 incréments élémentaires avec une tolérance de  $\pm 10$ .

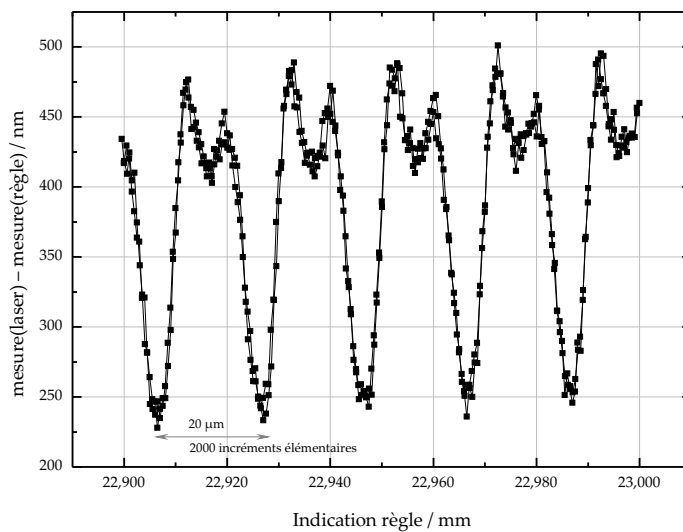


FIGURE B.2 – Erreur de micro-justesse du codeur linéaire sur une distance de  $100\text{ }\mu\text{m}$ .

Cette figure montre que l'erreur d'interpolation est répétable d'une gravure de la règle sur l'autre (le signal d'erreur est de période  $20\text{ }\mu\text{m}$ ).

Toutefois, il est apparu que l'initialisation de la mesure de position de la règle (procédure de *homing*), à défaut de changer le motif élémentaire de l'erreur d'interpolation, change la phase de l'erreur de justesse par rapport aux indications de la règle. Il n'est donc pas possible d'utiliser les informations de la FIGURE B.2 comme signal de correction entre deux *homing*.

Considérant que la pente maximale de l'erreur de micro-justesse est d'environ  $1\text{ nm}$  par incrément élémentaire, et considérant que l'on va placer le moteur à  $\pm 10$  incréments élémentaires de la valeur cible (un multiple de 2000),

l'erreur résiduelle de micro-justesse est donc  $\pm 10$  nm soit une incertitude de 6 nm en considérant une distribution carrée.

En conclusion, l'erreur de micro-justesse est donc de période 20  $\mu\text{m}$  et d'amplitude pic à pic 300 nm : cette erreur peut être rendue égale à 6 nm en effectuant des déplacements par pas dont la valeur est un multiple proche de la période de gravure (20  $\mu\text{m}$ ).

## B.4 Conclusion

On peut alors effectuer une somme quadratique des incertitudes décrites précédemment dans la TABLE B.1.

TABLE B.1 – Incertitude-type sur la mesure d'un déplacement de 1 cm par le codeur linéaire.

Composante d'incertitude	Valeur / nm
Estimation de l'indice de l'air (déplacement 1 cm)	<i>négligeable</i>
Parallélisme faisceau laser / déplacement (déplacement 1 cm)	<i>négligeable</i>
Correction justesse	50
Annulation microjustesse	6
Incertitude-type combinée relative	50

La correction de l'erreur de justesse de la règle associée au déplacement par pas de 20  $\mu\text{m}$  permet d'obtenir une incertitude-type totale de la mesure d'un déplacement de 1 cm de 50 nm.

---

## Annexe C

# Établissement des équations du modèle du double pendule

---

Le modèle que nous décrirons dans cette annexe a été proposé par F. Villar au LNE [161, 171]. Il est utilisé pour l'évaluation des forces et des moments parasites au chapitre 4.

Avant d'établir les équations, nous allons décrire complètement la suspension, de même que les hypothèses choisies.

### C.1 Description de la suspension et hypothèses simplificatrices

#### C.1.1 Description de la suspension côté masse

Un schéma du comparateur de forces et de ses suspensions a été montré en FIGURE 2.8 page 45 au chapitre 2. Nous nous intéressons ici à la suspension côté masse étalon. Cette suspension côté masse est montrée en FIGURE C.1 page suivante, au repère (a).

La lame d'extrémité supporte deux suspensions coaxiales, chacune à deux segments. La suspension interne est dédiée à l'accueil de la masse étalon tandis que la suspension externe supporte la bobine. Les deux suspensions articulées en leur milieu par des cardans à lames flexibles pincées sont reliées par un double cardan monolithique électro-usiné.

Notez que : 1) l'axe  $x$  est horizontal et parallèle à l'axe longitudinal du fléau, que 2) l'axe  $y$ , qui est dirigé dans la profondeur de la figure, est horizontal et perpendiculaire à l'axe longitudinal du fléau et que 3) l'axe  $z$ , défini parallèle au champ de gravitation local est dirigé dans le sens ascendant.

#### C.1.2 Hypothèses simplificatrices

Pour conserver aux équations mathématiques une simplicité proportionnée à celle du système physique, un certain nombre d'hypothèses sont faites :

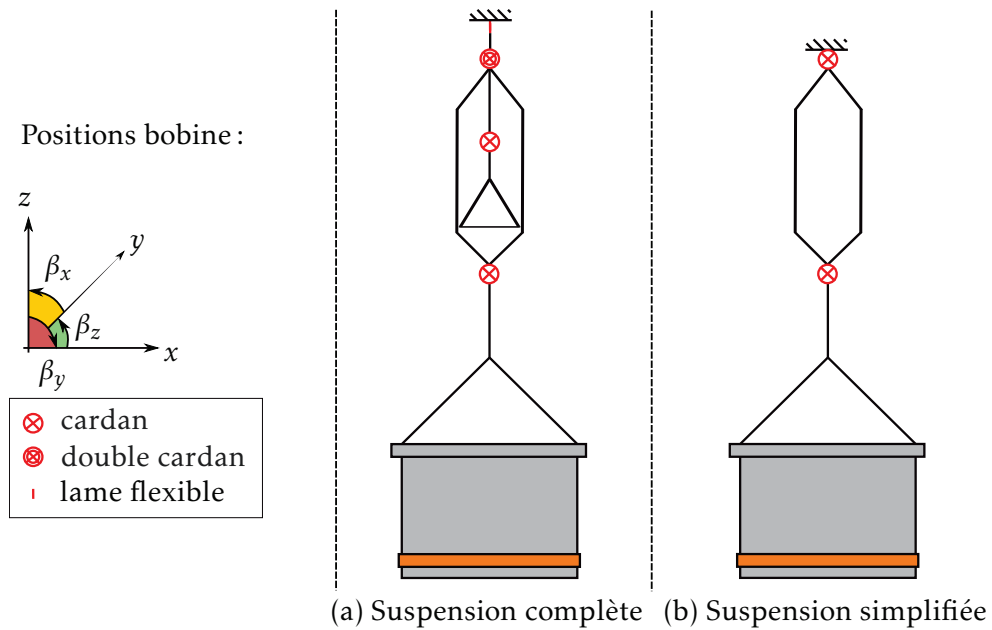


FIGURE C.1 – Simplification de la la suspension côté masse. (a) Suspension telle que présentée à la figure FIGURE 2.8 page 45, en négligeant les mouvements du fléau. (b) Suspension simplifiée, en négligeant les mouvements du fléau.

- i. La suspension de la masse étalon est considérée comme n'ayant pas d'influence sur le reste de la suspension grâce au double cardan. Le mouvement (faible et estimé au maximum à une centaine de micromètres) de cette suspension ne devrait pas affecter la suspension de la bobine .
- ii. La lame flexible d'extrémité du fléau de même que le segment rigide supportant la double suspension ne sont pas pris en compte. En effet, ces éléments ont une longueur correspondant environ au 1/7 de la longueur des deux autres segments de la suspension. Par ailleurs, la charge à leur extrémité est plus importante que celle des autres segments, puisqu'ils supportent leurs poids. Le mouvement de l'extrémité de ces éléments peuvent donc être estimés au dixième du déplacement du segment inférieur : sa contribution est donc négligeable par rapport aux amplitudes du mouvement de la bobine.
- iii. Les raideurs des deux cardans articulant la suspension sont négligés. Les cardans ont une raideur angulaire valant approximativement  $0,01 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$  [171] ce qui correspond à un moment négligeable de  $10 \text{ } \mu\text{N} \cdot \text{m}$  pour une inclinaison des segments par rapport à leur position de repos aussi importante que  $1 \text{ mrad}$ . Nous verrons que cette hypo-

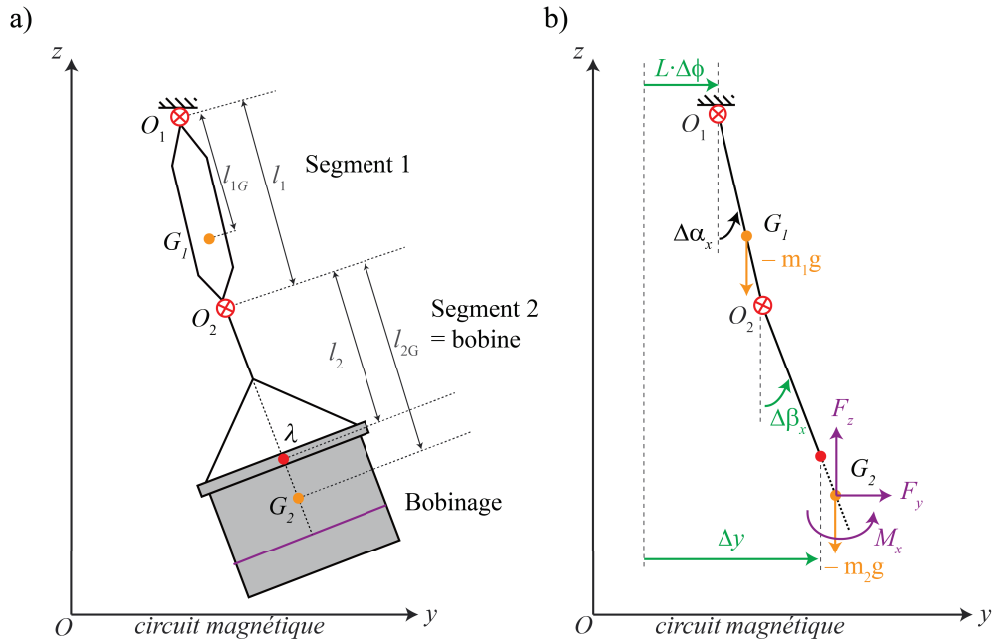


FIGURE C.2 – Schéma de la suspension dans le plan  $Oyz$  (a) Schéma de la suspension avec ses longueurs  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_{1G}$ ,  $l_{2G}$ , ses centres de masse  $G_1$  et  $G_2$ , son centre optique  $\lambda$  et ses cardans  $O_1$  et  $O_2$ . (b) Force  $F_y$  et moment  $M_x$  réduits au centre de masse  $G_2$ , poids ( $m_1 \cdot g$  et  $m_2 \cdot g$ ) agissant sur chacun des deux segments. Quantités mesurées du déplacement de la bobine  $\Delta y$  et  $\Delta\beta_x$  du segment 2 le long de l'axe  $y$  et du lacet du fléau  $\Delta\phi$  (de la position d'équilibre à courant nul vers la position d'équilibre à courant  $I$ ).

thèse est justifiée par comparaison aux moments déterminés au cours du chapitre 4.

- iv. Finalement, la bobine est réputée circulaire et immergée dans un champ magnétique radial : le moment vertical  $M_z$  est dans ce cas nul.

## C.2 Le modèle

Le segment 1 et le segment 2, séparés par des cardans (FIGURE C.1 page ci-contre, au repère (b)), fondent le modèle du double pendule.

Ces hypothèses permettent de réduire la suspension de bobine de la balance du watt à celle présentée à la FIGURE C.2 pour le plan  $Oyz$ . Les segments 1 et 2, caractérisés par des masses  $m_1$  et  $m_2$  et par des longueurs  $l_1$  et  $l_2$  sont reliés par un cardan. Leurs centres de masse, respectivement  $G_1$  et  $G_2$ , sont situés à des distances  $l_{1G}$  et  $l_{2G}$  des points centraux des cardans  $O_1$  et  $O_2$ .



Les capteurs de position précédemment décrits (capteurs gaussiens et capteurs capacitifs) permettent de mesurer le mouvement d'un point fictif  $\lambda$  du segment 2 ainsi que le mouvement angulaire de ce segment. Ce point  $\lambda$  est situé au barycentre du triangle formé par les axes des trois faisceaux lasers des capteurs gaussiens. Il est donc situé dans le plan défini par les 3 lames opaques, et non pas dans le plan de la bobine. C'est la longueur du centre du cardan  $O_2$  au plan défini par les 3 lames opaques que nous désignons par  $l_2$ .

La composante verticale de la force de Laplace  $F_z$  est connue : elle vaut  $(B \cdot \ell) \cdot I$ , où  $I$  est le courant circulant dans la bobine et  $(B \cdot \ell)$  le facteur géométrique. Si on s'intéresse aux équilibres de double pesée sa norme est  $\frac{m \cdot g}{2}$ , puisque c'est elle qui équilibre le défaut ou l'excès de masse  $m/2$  du fléau.

Enfin,  $F_y$  et  $M_x$  sont la force horizontale et le moment (réduit au centre de masse  $G_2$  du segment 2) dont les valeurs sont recherchées dans le plan  $Oyz$ .

En trois dimensions, sous l'effet des différentes forces et moments, les deux segments s'inclinent, lorsque la bobine est parcourue par un courant  $I$ , d'un angle  $(\Delta\alpha_x, \Delta\alpha_y)$  et  $(\Delta\beta_x, \Delta\beta_y)$  par rapport à leur position de repos (équilibre à courant nul).

Les déviations angulaires  $(\Delta\alpha_x, \Delta\alpha_y)$  du premier segment de la suspension ne sont pas mesurées. Toutefois, il est possible de les déterminer à partir des déplacements de la bobine  $(\Delta x, \Delta y)$ , des déviations angulaires du segment 2  $(\Delta\beta_x, \Delta\beta_y)$  et du mouvement de lacet du fléau  $(\Delta\phi)$  (FIGURE C.2).

TABLE C.1 – Paramètres numériques du modèle du double pendule.

Désignation	Symbole	Valeur
Longueur du segment 1	$l_1$	311,0 mm
Longueur du segment 2	$l_2$	191,0 mm
Distance du double cardan à $G_1$	$l_{1G}$	145,0 mm
Distance du cardan central à $G_2$	$l_{2G}$	221,0 mm
Masse du segment 1	$m_1$	460 g
Masse du segment 2	$m_2$	2 547 g
Facteur géométrique	$(B \cdot \ell)$	$536 \text{ N} \cdot \text{A}^{-1}$
Accélération de la pesanteur	$g$	$-9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Dans les équations suivantes, l'approximation des petits angles est faite.

Le bilan des moments s'exerçant sur le segment 1 de la suspension (FIGURE 4.7(b) page 118) exprimé par rapport au point  $O_1$ , en fonction de sa déviation angulaire  $(\Delta\alpha_x, \Delta\alpha_y)$  mène à :

$$m_1 \cdot g \cdot \Delta\alpha_y \cdot l_{1G} + (F_z + m_2 \cdot g) \cdot \Delta\alpha_y \cdot l_1 - F_x \cdot l_1 = 0, \quad \text{plan } Oxz, \quad (\text{C.1})$$

$$m_1 \cdot g \cdot \Delta\alpha_x \cdot l_{1G} + (F_z + m_2 \cdot g) \cdot \Delta\alpha_x \cdot l_1 + F_y \cdot l_1 = 0, \quad \text{plan } Oyz. \quad (\text{C.2})$$

Quant au bilan des moments s'exerçant sur le segment 2 de la suspension exprimé par rapport au point  $O_1$ , en fonction de sa déviation angulaire et de celle du segment 1 ( $\Delta\alpha_x, \Delta\alpha_y, \Delta\beta_x$ , et  $\Delta\beta_y$ ), il conduit à :

$$m_2 \cdot g \cdot \Delta\beta_y \cdot l_{2G} + F_z \cdot \Delta\beta_y \cdot l_{2G} - F_x \cdot l_{2G} + M_y = 0, \quad \text{plan } Oxz, \quad (C.3)$$

$$m_2 \cdot g \cdot \Delta\beta_x \cdot l_{2G} + F_z \cdot \Delta\beta_x \cdot l_{2G} + F_y \cdot l_{2G} + M_x = 0, \quad \text{plan } Oyz. \quad (C.4)$$

On peut réécrire ces quatre équations de façon à obtenir les déviations angulaires, reliées aux forces et moments parasites :

$$\Delta\alpha_x = -\frac{F_y}{\frac{g \cdot m_1 \cdot l_{1G}}{l_1} + g \cdot m_2 + F_z}, \quad (C.5)$$

$$\Delta\alpha_y = +\frac{F_x}{\frac{g \cdot m_1 \cdot l_{1G}}{l_1} + g \cdot m_2 + F_z}, \quad (C.6)$$

$$\Delta\beta_x = -\frac{F_y}{g \cdot m_2 + F_z} - \frac{M_x}{(g \cdot m_2 + F_z) \cdot l_{2G}}, \quad (C.7)$$

$$\Delta\beta_y = +\frac{F_x}{g \cdot m_2 + F_z} - \frac{M_y}{(g \cdot m_2 + F_z) \cdot l_{2G}}. \quad (C.8)$$

On pose  $F_1 = \frac{g \cdot m_1 \cdot l_{1G}}{l_1}$ , comme le poids équivalent du segment 1 agissant à son extrémité, et  $F_2 = g \cdot m_2 + F_z$  le poids équivalent agissant au centre de masse  $G_2$  du segment 2. Il vient, à partir du mouvement de la suspension :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\alpha_x = -\frac{F_y}{F_1 + F_2} \\ \Delta\alpha_y = +\frac{F_x}{F_1 + F_2} \\ \Delta\beta_x = -\frac{F_y}{F_2} - \frac{M_x}{F_2 \cdot l_{2G}} \\ \Delta\beta_y = +\frac{F_x}{F_2} - \frac{M_y}{F_2 \cdot l_{2G}} \end{array} \right. \quad (C.9)$$

La déviation du segment supérieur ( $\Delta\alpha_x, \Delta\alpha_y$ ) est seulement causée par l'existence des forces parasites, tandis que la déviation du segment inférieur ( $\Delta\beta_x, \Delta\beta_y$ ) est causée par les forces et les moments parasites. L'amplitude de la réponse en terme de déviation angulaire est proportionnelle aux forces et moments parasites, et inversement proportionnelle aux poids et longueurs des segments de la suspension.

Nous réécrivons alors les équations précédentes de manière à déterminer les forces et les moments parasites  $F_x, F_y, M_x, M_y$  en fonction des déviations angulaires des deux segments de la suspension :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = +[F_1 + F_2] \cdot \Delta\alpha_y \\ F_y = -[F_1 + F_2] \cdot \Delta\alpha_x \\ M_x = +[F_1 + F_2] \cdot l_{2G} \cdot \Delta\alpha_x - F_2 \cdot l_{2G} \cdot \Delta\beta_x \\ M_y = +[F_1 + F_2] \cdot l_{2G} \cdot \Delta\alpha_y - F_2 \cdot l_{2G} \cdot \Delta\beta_y \end{array} \right. \quad (C.10)$$

Ces expressions peuvent servir à la détermination des forces et des moments parasites, puisque sous réserve de déterminer les déviations angulaires des segments de la suspension, toutes les autres grandeurs y sont connues.

Toutefois, les déviations angulaires  $\Delta\alpha_x$ ,  $\Delta\alpha_y$  du segment 1 de la suspension ne sont pas déterminées directement. Les capteurs sont utilisés pour mesurer les déplacements linéaires ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ) et angulaires du support de bobine ( $\Delta\beta_x$  et  $\Delta\beta_y$ ) depuis sa position d'équilibre à courant nul (position de repos). On mesure également le mouvement de lacet du fléau  $\Delta\phi$ .

Des considérations géométriques permettent toutefois d'écrire des relations entre ces différentes grandeurs (FIGURE C.2 page 167) :

$$\Delta\alpha_y \cdot l_1 + \Delta\beta_y \cdot l_2 = -\Delta x, \quad (C.11)$$

$$\Delta\alpha_x \cdot l_1 + \Delta\beta_x \cdot l_2 + L \cdot \Delta\phi = +\Delta y. \quad (C.12)$$

Nous obtenons donc les déviations angulaires du segment supérieur de la suspension à partir des quantités mesurées :

$$\begin{cases} \Delta\alpha_x = \frac{+\Delta y - \Delta\beta_x \cdot l_2 - L \cdot \Delta\phi}{l_1} \\ \Delta\alpha_y = \frac{-\Delta x - \Delta\beta_y \cdot l_2}{l_1} \end{cases} \quad (C.13)$$

Nous allons à présent exprimer les forces et moments parasites en fonction des quantités mesurées. Par substitution des équations précédentes dans les équations C.10, il vient :

$$\begin{cases} F_x = +[F_1 + F_2] \cdot \left( \frac{-\Delta x - \Delta\beta_y \cdot l_2}{l_1} \right) \\ F_y = -[F_1 + F_2] \cdot \left( \frac{+\Delta y - \Delta\beta_x \cdot l_2 - L \cdot \Delta\phi}{l_1} \right) \\ M_x = \left[ -F_2 \cdot \Delta\beta_x + [F_1 + F_2] \cdot \left( \frac{+\Delta y - \Delta\beta_x \cdot l_2 - L \cdot \Delta\phi}{l_1} \right) \right] \cdot l_{2G} \\ M_y = \left[ -F_2 \cdot \Delta\beta_y + [F_1 + F_2] \cdot \left( \frac{-\Delta x - \Delta\beta_y \cdot l_2}{l_1} \right) \right] \cdot l_{2G} \end{cases} \quad (C.14)$$

On réarrange les expressions pour isoler les inconnues :

$$\begin{cases} F_x = -\left[ \frac{F_1 + F_2}{l_1} \right] \cdot \Delta x - \left[ \frac{F_1 + F_2}{l_1} \right] \cdot l_2 \cdot \Delta\beta_y \\ F_y = -\left[ \frac{F_1 + F_2}{l_1} \right] \cdot \Delta y + \left[ \frac{F_1 + F_2}{l_1} \right] \cdot l_2 \cdot \Delta\beta_x + \left[ \frac{F_1 + F_2}{l_1} \right] \cdot L \cdot \Delta\phi \\ M_x = +\left[ \frac{F_1 + F_2}{l_1} \right] \cdot l_{2G} \cdot \Delta y - \left[ \frac{F_1 + F_2}{l_1} \cdot l_2 + F_2 \right] \cdot l_{2G} \cdot \Delta\beta_x - \left[ \frac{F_1 + F_2}{l_1} \right] \cdot l_{2G} \cdot L \cdot \Delta\phi \\ M_y = -\left[ \frac{F_1 + F_2}{l_1} \right] \cdot l_{2G} \cdot \Delta x - \left[ \frac{F_1 + F_2}{l_1} \cdot l_2 + F_2 \right] \cdot l_{2G} \cdot \Delta\beta_y \end{cases} \quad (C.15)$$

On pose :

$$\kappa = \frac{F_1 + F_2}{l_1}, \quad (C.16)$$

qui a la dimension d'une force divisée par une longueur. Cette grandeur est la force verticale équivalente à l'ensemble des forces verticales, divisée par la longueur du segment 1. Elle varie à mesure que  $F_z$  varie avec  $I$  : ceci illustre le fait que la force verticale vue par le premier segment de la suspension dépend de la valeur de la composante verticale de la force de Laplace (et donc de  $I$ ).

On pose également :

$$\mu = \left( \frac{F_1 + F_2}{l_1} \cdot l_2 + F_2 \right) \cdot l_{2G}, \quad (\text{C.17})$$

qui est le moment équivalent exercé par les forces verticales sur le segment 2 si elles s'appliquaient toutes au centre de masse  $G_2$  du support bobine.

Le système précédent s'écrit alors :

$$\begin{cases} F_x = -\kappa \cdot \Delta x - \kappa \cdot l_2 \cdot \Delta\beta_y \\ F_y = -\kappa \cdot \Delta y + \kappa \cdot l_2 \cdot \Delta\beta_x + \kappa \cdot L \cdot \Delta\phi \\ M_x = +\kappa \cdot l_{2G} \cdot \Delta y - \mu \cdot \Delta\beta_x - \kappa \cdot l_{2G} \cdot L \cdot \Delta\phi \\ M_y = -\kappa \cdot l_{2G} \cdot \Delta x - \mu \cdot \Delta\beta_y \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

Par ce modèle, la mesure des déplacements du support bobine ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta\beta_x$  et  $\Delta\beta_y$ ) et du lacet du fléau ( $\Delta\phi$ ) permet de déterminer les forces et moments parasites ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M_x$  et  $M_y$ ) s'exerçant au centre de masse du support bobine.



---

## Annexe D

# Liste des publications

---

Actes de conférences internationales :

- M. THOMAS, P. ESPEL, F. BIELSA, P. JUNCAR, P. PINOT et G. GENEVES. « Present status of the LNE watt balance ». In : *2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM)*. 2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM). Washington DC, juil. 2012, pages 332–333. DOI : 10.1109/CPEM.2012.6250937 ;
- M. THOMAS, P. ESPEL, F. BIELSA, G. GENEVÈS, F. PIQUEMAL, P. JUNCAR et P. PINOT. « Progress report of the LNE watt balance ». In : *2014 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM)*. 2014 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM). Rio de Janeiro, août 2014. DOI : 10.1109/CPEM.2014.6898414.

Actes de conférence en France :

- M. THOMAS, F. BIELSA, Y. BRIAND, F. KOUMOUNDJI, P. ESPEL, G. GENEVÈS, P. JUNCAR, S. MERLET, P.-A. MEURY, F. PEREIRA DOS SANTOS et P. PINOT. « Une méthode de mesure de la constante de Planck : la balance du watt ». In : *Congrès international de métrologie*. Paris, 2013.

Publications dans une revue à comité de lecture :

- M. THOMAS, P. ESPEL, Y. BRIAND, G. GENEVÈS, F. BIELSA, P. PINOT, P. JUNCAR et F. PIQUEMAL, 2014. « Minimization of the coil movement of the LNE watt balance during weighing mode and estimation of parasitic forces and torques involved », *Metrologia* **51**:2, S54. DOI : 10.1088/0026-1394/51/2/S54 ;
- M. THOMAS, P. ESPEL, D. ZIANE, P. PINOT, P. JUNCAR, F. P. D. SANTOS, S. MERLET, F. PIQUEMAL et G. GENEVÈS, 2015. « First determination of the Planck constant using the LNE watt balance », *Metrologia* **52**:2, page 433. DOI : 10.1088/0026-1394/52/2/433.



---

# Bibliographie

---

- [1] K. ALDER. *Mesurer le monde : l'incroyable histoire de l'invention du mètre*. Paris : Flammarion, 2 avr. 2008 (cf. page 1).
- [2] *Earth according to WGS 84 (every degree of latitude)*. URL : [http://home.online.no/~sigurdhu/Grid\\_1deg.htm](http://home.online.no/~sigurdhu/Grid_1deg.htm) (visité le 15/12/2014) (cf. page 1).
- [3] L. MARQUET, 1989. « Historique de la naissance du kilogramme », *Bulletin du BNM* 76-77 (cf. pages 1, 6).
- [4] M. TANAKA, G. GIRARD, R. DAVIS, A. PEUTO et N. BIGNELL, 2001. « Recommended table for the density of water between 0 °C and 40 °C based on recent experimental reports », *Metrologia* 38:4, page 301. DOI: 10.1088/0026-1394/38/4/3 (cf. page 1).
- [5] *Le Système international d'unités (brochure SI)*. 8<sup>e</sup> édition, mis à jour en 2014. 2006. URL : <http://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/> (cf. pages 1, 5, 6, 156).
- [6] « Comptes rendus de la première Conférence générale des poids et mesures (1889) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 1)*. Paris, 1890. URL : <http://www.bipm.org/utils/common/pdf/CGPM/CGPM1.pdf> (cf. pages 2, 6, 7).
- [7] « Comptes rendus de la troisième Conférence générale des poids et mesures (1901) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 3)*. Paris, 1901. URL : <http://www.bipm.org/utils/common/pdf/CGPM/CGPM3.pdf> (cf. pages 2, 6, 156).
- [8] « Comptes rendus de la onzième Conférence générale des poids et mesures (1960) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 11)*. Paris, 1961. URL : <http://www.bipm.org/utils/common/pdf/CGPM/CGPM11.pdf> (cf. pages 2, 5).
- [9] « Comptes rendus de la dix-septième Conférence générale des poids et mesures (1983) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 17)*. Paris, 1984. URL : <http://www.bipm.org/utils/common/pdf/CGPM/CGPM17.pdf> (cf. pages 2, 10, 156).



- [10] I. M. MILLS, P. J. MOHR, T. J. QUINN, B. N. TAYLOR et E. R. WILLIAMS, 2005. « Redefinition of the kilogram : a decision whose time has come », *Metrologia* **42**:2, pages 71–80. DOI : 10.1088/0026-1394/42/2/001 (cf. pages 2, 11, 30).
- [11] C. J. BORDÉ, 2004. « Métrologie fondamentale : unités de base et constantes fondamentales », *Comptes Rendus Physique* **5**:8, pages 813–820. DOI : 10.1016/j.crhy.2004.09.018 (cf. pages 2, 5, 10).
- [12] J.-P. UZAN et R. LEHOUCQ. *Les constantes fondamentales*. Paris : Belin, 3 mai 2005. 487 pages (cf. page 5).
- [13] C. J. BORDÉ, 2005. « Base units of the SI, fundamental constants and modern quantum physics », *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **363**:1834, pages 2177–2201. DOI : 10.1098/rsta.2005.1635 (cf. pages 5, 24).
- [14] C. J. BORDÉ, 2007. « La réforme du système d'unités », *La lettre de l'Académie des sciences* **20**, pages 21–27. URL : christian.j.borde.free.fr/reforme.pdf (cf. pages 5, 7).
- [15] M. E. HIMBERT, 2009. « A brief history of measurement », *The European Physical Journal Special Topics* **172**:1, pages 25–35. DOI : 10.1140/epjst/e2009-01039-1 (cf. page 5).
- [16] « Comptes rendus de la quatorzième Conférence générale des poids et mesures (1971) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 14)*. Paris, 1972. URL : <http://www.bipm.org/utils/common/pdf/CGPM/CGPM14.pdf> (cf. pages 5, 9, 156).
- [17] T. J. QUINN, 1995. « Base Units of the Système International d'Unités, their Accuracy, Dissemination and International Traceability », *Metrologia* **31**:6, pages 515–527. DOI : 10.1088/0026-1394/31/6/011 (cf. pages 5, 24).
- [18] J. MONOD. *Le Hasard et la Nécessité*. Paris : Seuil, 1973 (cf. page 6).
- [19] R. DAVIS, 2003. « The SI unit of mass », *Metrologia* **40**:6, page 299. URL : <http://iopscience.iop.org/0026-1394/40/6/001> (visité le 05/10/2012) (cf. page 6).
- [20] M. PLASSA. « The international prototype of the kilogram – a successful standard – the history of its choice and realization ». In : *Basic metrology and applications*. Editrice Levrotto & Bella. Turin (cf. page 6).
- [21] URL : <http://www.bipm.org/en/bipm/mass/image-ipk.html> (visité le 17/12/2014) (cf. page 7).
- [22] P. PINOT, G. GENEVÈS et M. HIMBERT, 2011. « Prototype du kilogramme et constante physique fondamentale : la dissémination de l'unité de masse », *Revue française de métrologie* **22**, pages 3–18. DOI : 10.1051/rfm/2010002 (cf. page 6).

- [23] G. GIRARD. *Le nettoyage-lavage des prototypes du kilogramme au BIPM*. 1990. URL : <http://www.bipm.org/utis/fr/pdf/Monographie1990-1-FR.pdf> (cf. pages 6, 9).
- [24] K. MARTI, P. FUCHS et S. RUSSI, 2012. « Cleaning of mass standards : a comparison of new and old techniques », *Metrologia* **49**:6, pages 628–634. DOI : 10.1088/0026-1394/49/6/628 (cf. page 6).
- [25] Z. SILVESTRI. « Caractérisation physico-chimique de surface des étalons de masse ». Thèse de doctorat. Conservatoire national des arts et métiers – CNAM, 31 oct. 2005. URL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011235> (visité le 26/03/2014) (cf. pages 7, 55).
- [26] G. GIRARD, 2005. « The third periodic verification of national prototypes of the kilogram (1988-1992) », *Metrologia* **31**:4, page 317. URL : <http://iopscience.iop.org/0026-1394/31/4/007> (visité le 09/10/2012) (cf. pages 7, 8).
- [27] « Comptes rendus de la dixième Conférence générale des poids et mesures (1954) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 10)*. Paris, 1956. URL : <http://www.bipm.org/utis/common/pdf/CGPM/CGPM10.pdf> (cf. page 7).
- [28] M. STOCK. In : *CCEM WG on monitoring the kilogram. Session orale du Satellite meeting of : Conference on precision electromagnetic measurements (CPEM 2014)*. Rio de Janeiro, 2014 (cf. pages 7, 8).
- [29] J.-M. L. ARCOS, M. STOCK, R. WIELGOSZ, F. ARIAS et M. MILTON, 2015. « News from the BIPM laboratories : 2014 », *Metrologia* **52**:1, page 155. DOI : 10.1088/0026-1394/52/1/155 (cf. pages 7, 9).
- [30] M. J. T. MILTON, R. DAVIS et N. FLETCHER, 2014. « Towards a new SI: a review of progress made since 2011 », *Metrologia* **51**:3, R21. DOI : 10.1088/0026-1394/51/3/R21 (cf. pages 7, 12).
- [31] R. S. DAVIS, 1989. « The Stability of the SI Unit of Mass as Determined from Electrical Measurements », *Metrologia* **26**:1, pages 75–76. DOI : 10.1088/0026-1394/26/1/007 (cf. page 8).
- [32] T. QUINN, 1991. « The kilogram : the present state of our knowledge », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **40**:2, pages 81–85. DOI : 10.1109/TIM.1990.1032888 (cf. page 8).
- [33] P. FUCHS, K. MARTI et S. RUSSI, 2013. « Removal of mercury contamination on primary mass standards by hydrogen plasma and thermal desorption », *Metrologia* **50**:1, pages 73–82. DOI : 10.1088/0026-1394/50/1/73 (cf. page 9).
- [34] P. J. CUMPSON, J. F. PORTOLES, N. SANO et A. J. BARLOW, 2013. « Stability of reference masses : VI. Mercury and carbonaceous contamination on platinum weights manufactured at a similar time as the international and national prototype kilograms », *Metrologia* **50**:5, page 518. DOI : 10.1088/0026-1394/50/5/518 (cf. page 9).

- [35] « Comptes rendus de la neuvième Conférence générale des poids et mesures (1948) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 9)*. Paris, 1949. URL : <http://www.bipm.org/utis/common/pdf/CGPM/CGPM9.pdf> (cf. pages 9, 10, 156).
- [36] « Comptes rendus de la seizième Conférence générale des poids et mesures (1979) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 16)*. Paris, 1980. URL : <http://www.bipm.org/utis/common/pdf/CGPM/CGPM16.pdf> (cf. pages 9, 156).
- [37] « Comptes rendus de la vingtième Conférence générale des poids et mesures (1995) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 20)*. Paris, 1996. URL : <http://www.bipm.org/utis/common/pdf/CGPM/CGPM20.pdf> (cf. page 9).
- [38] « Comptes rendus de la vingt-et-unième Conférence générale des poids et mesures (1999) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 21)*. Paris, 2001. URL : <http://www.bipm.org/utis/common/pdf/CGPM/CGPM21.pdf> (cf. page 9).
- [39] « Comptes rendus de la vingt-troisième Conférence générale des poids et mesures (2007) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 23)*. Paris, 2010. URL : <http://www.bipm.org/utis/common/pdf/CGPM/CGPM23.pdf> (cf. page 9).
- [40] J. C. MAXWELL et W. D. NIVIN. *The scientific papers of James Clerk Maxwell*. Avec la collaboration de B. U. MUGAR MEMORIAL LIBRARY. New York, Dover Publications, 1890. 672 pages. URL : <http://archive.org/details/scientificpapers01maxw> (visité le 17/12/2014) (cf. page 10).
- [41] M. PLANCK, 1900. « Ueber irreversible Strahlungsvorgänge (On irreversible radiative processes) », *Annalen der Physik* **306**:1, pages 69–122. DOI : 10.1002/andp.19003060105 (cf. page 10).
- [42] « Comptes rendus de la treizième Conférence générale des poids et mesures (1967-1968) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 13)*. Paris, 1969. URL : <http://www.bipm.org/utis/common/pdf/CGPM/CGPM13.pdf> (cf. pages 10, 156).
- [43] R. T. BIRGE, 1929. « Probable Values of the General Physical Constants », *Reviews of Modern Physics* **1**:1, pages 1–73. DOI : 10.1103/RevModPhys.1.1 (cf. page 10).
- [44] E. COHEN et J. DUMOND, 1965. « Our Knowledge of the Fundamental Constants of Physics and Chemistry in 1965 », *Reviews of Modern Physics* **37**:4, pages 537–594. DOI : 10.1103/RevModPhys.37.537 (cf. page 10).

- [45] B. TAYLOR, W. PARKER et D. LANGENBERG, 1969. « Determination of  $\frac{e}{h}$ , Using Macroscopic Quantum Phase Coherence in Superconductors: Implications for Quantum Electrodynamics and the Fundamental Physical Constants », *Reviews of Modern Physics* **41**:3, pages 375–496. DOI : 10.1103/RevModPhys.41.375 (cf. page 10).
- [46] E. R. COHEN et B. N. TAYLOR, 1973. « The 1973 Least-Squares Adjustment of the Fundamental Constants », *Journal of Physical and Chemical Reference Data* **2**:4, pages 663–734. URL : <http://www.nist.gov/data/PDFfiles/jpcrd37.pdf> (visité le 10/03/2014) (cf. page 10).
- [47] E. R. COHEN et B. N. TAYLOR, 1987. « The 1986 CODATA recommended values of the fundamental physical constants », *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **92**: pages 85–95. URL : [http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/092/jresv92n2p85\\_A1b.pdf](http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/092/jresv92n2p85_A1b.pdf) (visité le 15/09/2014) (cf. page 10).
- [48] P. J. MOHR et B. N. TAYLOR, 2000. « CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998 », *Reviews of Modern Physics* **72**:2, page 351. URL : <http://physics.nist.gov/cuu/Archive/1998RMP.pdf> (cf. pages 10, 14, 22, 29).
- [49] P. J. MOHR et B. N. TAYLOR, 2005. « CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2002 », *Reviews of Modern Physics* **77**:1, page 1. URL : <http://physics.nist.gov/cuu/Archive/2002RMP.pdf> (cf. pages 10, 22).
- [50] P. J. MOHR, B. N. TAYLOR et D. B. NEWELL, 2008. « CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006 », *Reviews of Modern Physics* **80**:2, pages 633–730. URL : [http://physics.nist.gov/cuu/Constants/RevModPhys\\_80\\_000633acc.pdf](http://physics.nist.gov/cuu/Constants/RevModPhys_80_000633acc.pdf) (visité le 15/09/2014) (cf. pages 10, 22).
- [51] P. J. MOHR, B. N. TAYLOR et D. B. NEWELL, 2012. « CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2010 », *Reviews of Modern Physics* **84**:4, pages 1527–1605. DOI : 10.1103/RevModPhys.84.1527 (cf. pages 10, 22, 23, 149).
- [52] L. ESSEN et J. V. L. PARRY, 1955. « An Atomic Standard of Frequency and Time Interval: A C esium Resonator », *Nature* **176**:4476, pages 280–282. DOI : 10.1038/176280a0 (cf. page 10).
- [53] W. MARKOWITZ, R. HALL, L. ESSEN et J. PARRY, 1958. « Frequency of Cesium in Terms of Ephemeris Time », *Physical Review Letters* **1**:3, pages 105–107. DOI : 10.1103/PhysRevLett.1.105 (cf. page 10).
- [54] *Atomic clock*. In : *Wikipedia, the free encyclopedia*. Page Version ID : 637206069. 11 d c. 2014. URL : [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Atomic\\_clock%5C&oldid=637206069](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Atomic_clock%5C&oldid=637206069) (visité le 12/12/2014) (cf. page 10).

- [55] M. LOMBARDI, T. HEAVNER et S. JEFFERTS, 2007. « NIST Primary Frequency Standards and the Realization of the SI Second », *NCSL international measure* 2:4, page 74. URL : <http://tf.nist.gov/general/pdf/2039.pdf> (cf. page 10).
- [56] M. GLÄSER, 2003. « Tracing the atomic mass unit to the kilogram by ion accumulation », *Metrologia* 40:6, pages 376–386. DOI : 10.1088/0026-1394/40/6/009 (cf. page 11).
- [57] D. SULLIVAN et N. FREDERICK, 1977. « Can superconductivity contribute to the determination of the absolute ampere ? », *IEEE Transactions on Magnetism* 13:1, pages 396–399. DOI : 10.1109/TMAG.1977.1059483 (cf. page 11).
- [58] E. T. FRANTSUZ, V. M. KHAVINSON, G. GENEVÈS et F. PIQUEMAL, 1996. « A proposed superconducting magnetic levitation system intended to monitor stability of the unit of mass », *Metrologia* 33:3, page 189. DOI : 10.1088/0026-1394/33/3/1 (cf. page 11).
- [59] S. G. KARSHENBOIM, 2005. « On a natural definition of the kilogram and the ampere : the objectives and consequences », *Arxiv preprint physics/0507200*. URL : <http://arxiv.org/abs/physics/0507200> (visité le 20/06/2012) (cf. page 11).
- [60] P. J. MOHR, 2005. « The fundamental constants and theory », *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 363:1834, pages 2123–2137. DOI : 10.1098/rsta.2005.1641 (cf. page 11).
- [61] P. BECKER, P. D. BIÈVRE, K. FUJII, M. GLAESER, B. INGLIS, H. LUEBBIG et G. MANA, 2007. « Considerations on future redefinitions of the kilogram, the mole and of other units », *Metrologia* 44:1, pages 1–14. DOI : 10.1088/0026-1394/44/1/001 (cf. page 11).
- [62] I. M. MILLS, P. J. MOHR, T. J. QUINN, B. N. TAYLOR et E. R. WILLIAMS, 2006. « Redefinition of the kilogram, ampere, kelvin and mole : a proposed approach to implementing CIPM recommendation 1 (CI-2005) », *Metrologia* 43:3, pages 227–246. DOI : 10.1088/0026-1394/43/3/006 (cf. page 11).
- [63] « Comptes rendus de la vingt-quatrième Conférence générale des poids et mesures (2011) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 24)*. Paris, 2013. URL : <http://www.bipm.org/utis/common/pdf/CGPM/CGPM24.pdf> (cf. pages 11, 155, 157).
- [64] « Comptes rendus de la vingt-cinquième Conférence générale des poids et mesures (2014) ». In : *Conférence générale des poids et mesures (CGPM 25)*. Paris, non publié. URL : <http://www.bipm.org/utis/common/pdf/CGPM/CGPM25.pdf> (cf. page 12).

- [65] A. EICHENBERGER, G. GENEVÈS et P. GOURNAY, 2009. « Determination of the Planck constant by means of a watt balance », *The European Physical Journal Special Topics* **172**:1, pages 363–383. DOI: 10.1140/epjst/e2009-01061-3 (cf. pages 12, 28).
- [66] P. BECKER, H. BETTIN, H.-U. DANZEBRINK, M. GLÄSER, U. KUETGENS, A. NICOLAUS, D. SCHIEL, P. D. BIÈVRE, S. VALKIERS et P. TAYLOR, 2003. « Determination of the Avogadro constant via the silicon route », *Metrologia* **40**:5, page 271. DOI: 10.1088/0026-1394/40/5/010 (cf. pages 12, 14).
- [67] OIML. *Poids des classes  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $M_1$ ,  $M_{1-2}$ ,  $M_2$ ,  $M_{2-3}$  et  $M_3$  – Partie 1: Exigences métrologiques et techniques*. 2004. URL: [www.oiml.org/fr/files/pdf\\_r/r111-1-f04.pdf](http://www.oiml.org/fr/files/pdf_r/r111-1-f04.pdf) (cf. page 12).
- [68] R. STEINER, 2013. « History and progress on accurate measurements of the Planck constant », *Reports on Progress in Physics* **76**:1, page 016101. DOI: 10.1088/0034-4885/76/1/016101 (cf. pages 12, 28).
- [69] P. BECKER, 2001. « History and progress in the accurate determination of the Avogadro constant », *Reports on Progress in Physics* **64**:12, pages 1945–2008. DOI: 10.1088/0034-4885/64/12/206 (cf. page 12).
- [70] K. FUJII, A. WASEDA, N. KURAMOTO, S. MIZUSHIMA, P. BECKER, H. BETTIN, A. NICOLAUS, U. KUETGENS, S. VALKIERS, P. TAYLOR, P. D. BIEVRE, G. MANA, E. MASSA, R. MATYI, E. KESSLER Jr. et M. HANKE, 2005. « Present state of the Avogadro constant determination from silicon crystals with natural isotopic compositions », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **54**:2, pages 854–859. DOI: 10.1109/TIM.2004.843101 (cf. page 14).
- [71] S. VALKIERS, G. MANA, K. FUJII et P. BECKER, 2011. « Si primary standards for the calibration of ion-current ratios in the molar-mass measurement of natural Si single crystals », *Metrologia* **48**: S26. URL: <http://iopscience.iop.org/0026-1394/48/2/S04> (visité le 20/06/2012) (cf. page 14).
- [72] P. BECKER, H. FRIEDRICH, K. FUJII, W. GIARDINI, G. MANA, A. PICARD, H.-J. POHL, H. RIEMANN et S. VALKIERS, 2009. « The Avogadro constant determination via enriched silicon-28 », *Measurement Science and Technology* **20**:9, page 092002. DOI: 10.1088/0957-0233/20/9/092002 (cf. page 14).
- [73] B. ANDREAS, Y. AZUMA, G. BARTL, P. BECKER, H. BETTIN, M. BORYS, I. BUSCH, M. GRAY, P. FUCHS, K. FUJII, H. FUJIMOTO, E. KESSLER, M. KRUMREY, U. KUETGENS, N. KURAMOTO, G. MANA, P. MANSON, E. MASSA, S. MIZUSHIMA, A. NICOLAUS, A. PICARD, A. PRAMANN, O. RIENITZ, D. SCHIEL, S. VALKIERS et A. WASEDA, 2010. « An accurate determination of the Avogadro constant by counting the atoms in a  $^{28}\text{Si}$  crystal », *arXiv:1010.2317 [cond-mat, physics:physics]*. URL: <http://arxiv.org/abs/1010.2317> (visité le 01/01/2015) (cf. page 14).

- [74] B. ANDREAS, Y. AZUMA, G. BARTL, P. BECKER, H. BETTIN, M. BORYS, I. BUSCH, P. FUCHS, K. FUJII, H. FUJIMOTO, E. KESSLER, M. KRUMREY, U. KUETGENS, N. KURAMOTO, G. MANA, E. MASSA, S. MIZUSHIMA, A. NICOLAUS, A. PICARD, A. PRAMANN, O. RIENITZ, D. SCHIEL, S. VALKIERS, A. WASEDA et S. ZAKEL, 2011. « Counting the atoms in a  $^{28}\text{Si}$  crystal for a new kilogram definition », *Metrologia* **48**:2, S1–S13. DOI: 10.1088/0026-1394/48/2/S01 (cf. page 14).
- [75] B. ANDREAS, Y. AZUMA, G. BARTL, P. BECKER, H. BETTIN, M. BORYS, I. BUSCH, M. GRAY, P. FUCHS, K. FUJII, H. FUJIMOTO, E. KESSLER, M. KRUMREY, U. KUETGENS, N. KURAMOTO, G. MANA, P. MANSON, E. MASSA, S. MIZUSHIMA, A. NICOLAUS, A. PICARD, A. PRAMANN, O. RIENITZ, D. SCHIEL, S. VALKIERS et A. WASEDA, 2011. « Determination of the Avogadro Constant by Counting the Atoms in a  $^{28}\text{Si}$  Crystal », *Physical Review Letters* **106**:3, page 030801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.030801 (cf. page 14).
- [76] G. MANA. « An improved measurement of  $N_A$  ». In : *Session orale du Fundamental Constant Meeting*. Eltville, Allemagne, 4 fév. 2015 (cf. page 14).
- [77] A. G. STEELE, J. MEIJA, C. A. SANCHEZ, L. YANG, B. M. WOOD, R. E. STURGEON, Z. MESTER et A. D. INGLIS, 2012. « Reconciling Planck constant determinations via watt balance and enriched-silicon measurements at NRC Canada », *Metrologia* **49**:1, pages L8–L10. DOI: 10.1088/0026-1394/49/1/L03 (cf. pages 14, 31).
- [78] T. NARUKAWA, A. HIOKI, N. KURAMOTO et K. FUJII, 2014. « Molar-mass measurement of a  $^{28}\text{Si}$ -enriched silicon crystal for determination of the Avogadro constant », *Metrologia* **51**:3, page 161. DOI: 10.1088/0026-1394/51/3/161 (cf. page 15).
- [79] R. D. J. VOCKE, S. A. RABB et G. C. TURK, 2014. « Absolute silicon molar mass measurements, the Avogadro constant and the redefinition of the kilogram », *Metrologia* **51**:5, page 361. DOI: 10.1088/0026-1394/51/5/361 (cf. page 15).
- [80] Y. AZUMA, P. BARAT, G. BARTL, H. BETTIN, M. BORYS, I. BUSCH, L. CIBIK, G. D'AGOSTINO, K. FUJII, H. FUJIMOTO, A. HIOKI, M. KRUMREY, U. KUETGENS, N. KURAMOTO, G. MANA, E. MASSA, R. MEESSYSTEME INTERNATIONAL D'UNITÉS, S. MIZUSHIMA, T. NARUKAWA, A. NICOLAUS, A. PRAMANN, S. A. RABB, O. RIENITZ, C. SASSO, M. STOCK, R. D. V. JR, A. WASEDA, S. WUNDRACK et S. ZAKEL, 2015. « Improved measurement results for the Avogadro constant using a  $^{28}\text{Si}$ -enriched crystal », *Metrologia* **52**:2, page 360. DOI: 10.1088/0026-1394/52/2/360 (cf. page 15).
- [81] B. P. KIBBLE. *Atomic Masses and Fundamental Constants*. Sous la direction de J. H. SANDERS et A. H. WAPSTRA. Plenum. Tome 5. New-York, 1976. 545 pages. (Visité le 05/10/2012) (cf. page 16).

- [82] P. VIGOUREUX, 1965. « A Determination of the Ampere », *Metrologia* 1:1, page 3. DOI: 10.1088/0026-1394/1/1/003 (cf. page 16).
- [83] J. FERREIRA. *Cours de Magnétostatique – DEUG SMA*. 2001. URL: [http://ipag.osug.fr/~ferreira/enseignement/magneto\\_complet.pdf](http://ipag.osug.fr/~ferreira/enseignement/magneto_complet.pdf) (visité le 28/01/2013) (cf. page 16).
- [84] H. FANG, A. KISS, A. PICARD et M. STOCK, 2014. « A watt balance based on a simultaneous measurement scheme », *Metrologia* 51:2, S80. DOI: 10.1088/0026-1394/51/2/S80 (cf. pages 17, 20).
- [85] I. A. ROBINSON, 2012. « Alignment of the NPL Mark II watt balance », *Measurement Science and Technology* 23:12, page 124012. DOI: 10.1088/0957-0233/23/12/124012 (cf. pages 17, 20, 28).
- [86] S. POMMIER et Y. BERTHAUD. *Mécanique générale*. Dunod, 2010 (cf. page 17).
- [87] G. STENBAKKEN, R. STEINER, P. OLSEN et E. WILLIAMS, 1996. « Methods for aligning the NIST watt-balance », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 45:2, pages 372–377. DOI: 10.1109/19.492750 (cf. page 19).
- [88] GILLESPIE, K. FUJII, D. NEWELL, P. OLSEN, O. PICARD, R. STEINER, G. STENBAKKEN et E. WILLIAMS, 1997. « Alignment uncertainties of the NIST watt experiment », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 46:2, pages 605–608. DOI: 10.1109/19.571933 (cf. page 20).
- [89] M. GLÄSER, M. BORYS, D. RATSCHKO et R. SCHWARTZ, 2010. « Redefinition of the kilogram and the impact on its future dissemination », *Metrologia* 47:4, pages 419–428. DOI: 10.1088/0026-1394/47/4/007 (cf. page 20).
- [90] S. SCHLAMMINGER, D. HADDAD, F. SEIFERT, L. S. CHAO, D. B. NEWELL, R. LIU, R. L. STEINER et J. R. PRATT, 2014. « Determination of the Planck constant using a watt balance with a superconducting magnet system at the National Institute of Standards and Technology », *Metrologia* 51:2, S15. DOI: 10.1088/0026-1394/51/2/S15 (cf. pages 20, 31).
- [91] A. EICHENBERGER, H. BAUMANN, B. JECKELMANN, D. TOMMASINI, F. COSANDIER, R. CLAVEL, C. BEGUIN et D. REBER. « The METAS watt balance Mark II experiment ». In: *2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM)*. 2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM). Juil. 2012, pages 426–427. DOI: 10.1109/CPEM.2012.6250985 (cf. page 20).



- [92] F. COSANDIER, A. EICHENBERGER, H. BAUMANN, B. JECKELMANN, M. BONNY, V. CHATAGNY et R. CLAVEL, 2014. « Development and integration of high straightness flexure guiding mechanisms dedicated to the METAS watt balance Mark II », *Metrologia* **51**:2, S88. DOI: 10.1088/0026-1394/51/2/S88 (cf. page 20).
- [93] E. de MIRANDÉS, H. FANG, A. KISS, S. SOLVE, M. STOCK et A. PICARD, 2011. « Alignment Procedure Used in the BIPM Watt Balance », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **60**:7, pages 2415–2421. DOI: 10.1109/TIM.2011.2144250 (cf. page 20).
- [94] C. A. SANCHEZ, B. M. WOOD, R. G. GREEN, J. O. LIARD et D. INGLIS, 2014. « A determination of Planck's constant using the NRC watt balance », *Metrologia* **51**:2, S5. DOI: 10.1088/0026-1394/51/2/S5 (cf. pages 20, 28, 31).
- [95] C. A. SANCHEZ et B. M. WOOD, 2014. « Alignment of the NRC watt balance: considerations, uncertainties and techniques », *Metrologia* **51**:2, S42. DOI: 10.1088/0026-1394/51/2/S42 (cf. page 20).
- [96] B. JOSEPHSON, 1962. « Possible new effects in superconductive tunneling », *Physics Letters* **1**:7, pages 251–253. DOI: 10.1016/0031-9163(62)91369-0 (cf. page 22).
- [97] P. ANDERSON et J. ROWELL, 1963. « Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect », *Physical Review Letters* **10**:6, pages 230–232. DOI: 10.1103/PhysRevLett.10.230 (cf. page 22).
- [98] S. SHAPIRO, 1963. « Josephson Currents in Superconducting Tunneling: The Effect of Microwaves and Other Observations », *Physical Review Letters* **11**:2, pages 80–82. DOI: 10.1103/PhysRevLett.11.80 (cf. page 22).
- [99] R. PÖPEL, 1992. « The Josephson Effect and Voltage Standards », *Metrologia* **29**:2, page 153. DOI: 10.1088/0026-1394/29/2/005 (cf. page 22).
- [100] K. v. KLITZING, G. DORDA et M. PEPPER, 1980. « New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance », *Physical Review Letters* **45**:6, pages 494–497. DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.494 (cf. page 22).
- [101] A. HARTLAND, 1992. « The Quantum Hall Effect and Resistance Standards », *Metrologia* **29**:2, page 175. DOI: 10.1088/0026-1394/29/2/006 (cf. page 22).
- [102] B. STECK. « Application en métrologie électrique de dispositifs mono-électroniques: vers une fermeture du triangle métrologique ». Thèse de doctorat. Université de Caen, 28 nov. 2007. URL: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00203161/document> (visité le 30/12/2014) (cf. page 22).

- [103] T. CHARRON. « Pompes à électrons à base de nanofils de silicium pour la métrologie électrique ». Thèse de doctorat. Paris 6, 1<sup>er</sup> jan. 2013. URL : <http://www.theses.fr/2013PA066707> (visité le 30/12/2014) (cf. pages 22, 23).
- [104] F. PIQUEMAL, A. BOUNOUH, L. DEVOILLE, N. FELTIN, O. THEVENOT et G. TRAPON, 2004. « Fundamental electrical standards and the quantum metrological triangle », *Comptes Rendus Physique* 5:8, pages 857–879. DOI: 10.1016/j.crhy.2004.08.006 (cf. page 22).
- [105] B. M. WOOD et S. SOLVE, 2009. « A review of Josephson comparison results », *Metrologia* 46:6, R13–R20. DOI: 10.1088/0026-1394/46/6/R01 (cf. page 22).
- [106] C. GLATTLI, 2011. « Foreword », *Comptes Rendus Physique. Quantum Hall Effect and Metrology* 12:4, pages 319–322. DOI: 10.1016/j.crhy.2011.05.001 (cf. page 22).
- [107] « Procès-verbaux des séances du Comité international des poids et mesures – Recommandation 1 ». In : *Comité international des poids et mesures (CIPM)*. Tome 56. Paris, 1988, page 19. URL : <http://www.bipm.org/fr/CIPM/db/1988/1/> (cf. page 23).
- [108] « Procès-verbaux des séances du Comité international des poids et mesures – Recommandation 2 ». In : *Comité international des poids et mesures (CIPM)*. Tome 56. Paris, 1988, page 20. URL : <http://www.bipm.org/fr/CIPM/db/1988/2/> (cf. page 23).
- [109] T. J. QUINN, 1989. « News from the BIPM », *Metrologia* 26:1, page 69. DOI: 10.1088/0026-1394/26/1/006 (cf. page 23).
- [110] « Procès-verbaux des séances du Comité international des poids et mesures ». In : *Comité international des poids et mesures (CIPM)*. Tome 68. Paris, 2000, page 34. URL : <http://www.bipm.org/en/committees/cipm/cipm-2000.html> (cf. page 23).
- [111] I. ROBINSON, 2009. « Toward a Final Result From the NPL Mark II Watt Balance », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 58:4, pages 936–941. DOI: 10.1109/TIM.2008.2008090 (cf. page 26).
- [112] G. GENEVÈS, P. GOURNAY, C. HAUCK et S. DJORDJEVIC. « Characterisation of a SINIS programmable binary junction array as a reference for the french watt balance experiment ». In : *Proceedings of the XXVIII<sup>th</sup> URSI General Assembly*. New Delhi, oct. 2005 (cf. pages 27, 152).
- [113] A. EICHENBERGER, B. JECKELMANN et P. RICHARD, 2003. « Tracing Planck's constant to the kilogram by electromechanical methods », *Metrologia* 40: page 356. URL : <http://iopscience.iop.org/0026-1394/40/6/007> (visité le 20/06/2012) (cf. page 28).

- [114] M. STOCK, 2011. « The watt balance : determination of the Planck constant and redefinition of the kilogram », *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **369**:1953, pages 3936–3953. DOI: 10.1098/rsta.2011.0184 (cf. page 28).
- [115] M. STOCK, 2013. « Watt balance experiments for the determination of the Planck constant and the redefinition of the kilogram », *Metrologia* **50**:1, R1–R16. DOI: 10.1088/0026-1394/50/1/R1 (cf. page 28).
- [116] R. L. STEINER, E. R. WILLIAMS, R. LIU et D. B. NEWELL, 2007. « Uncertainty Improvements of the NIST Electronic Kilogram », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **56**:2, pages 592–596. DOI: 10.1109/TIM.2007.890590 (cf. pages 28, 30).
- [117] B. P. KIBBLE, R. C. SMITH et I. A. ROBINSON, 1983. « The NPL Moving-Coil Ampere Determination », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **32**:1, pages 141–143. DOI: 10.1109/TIM.1983.4315025 (cf. page 28).
- [118] B. W. PETLEY, B. P. KIBBLE et A. HARTLAND, 1987. « A measurement of the Planck constant », *Nature* **327**: pages 605–606. DOI: 10.1038/327605a0 (cf. page 28).
- [119] A. HARTLAND, R. JONES et D. J. LEGG. « Document CCE/88-9 ». In : *18<sup>th</sup> meeting of the CCE*. 1988 (cf. page 28).
- [120] B. P. KIBBLE, I. A. ROBINSON et J. H. BELLIS, 1990. « A realization of the SI watt by the NPL moving-coil balance », *Metrologia* **27**: page 173. URL: <http://iopscience.iop.org/0026-1394/27/4/002> (visité le 20/06/2012) (cf. page 28).
- [121] P. T. OLSEN, V. E. BOWER, W. D. PHILLIPS, E. R. WILLIAMS et G. R. JONES, 1985. « The NBS Absolute Ampere Experiment », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **IM-34**:2, pages 175–181. DOI: 10.1109/TIM.1985.4315295 (cf. page 29).
- [122] P. OLSEN, R. ELMQUIST, W. PHILLIPS, E. WILLIAMS, G. JONES et V. E. BOWER, 1989. « A measurement of the NBS electrical watt in SI units », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **38**:2, pages 238–244. DOI: 10.1109/19.192279 (cf. page 29).
- [123] M. CAGE, R. F. DZIUBA, R. ELMQUIST, B. FIELD, G. JONES, P. OLSEN, W. PHILLIPS, J. Q. SHIELDS, R. STEINER, B. TAYLOR et E. WILLIAMS, 1989. « NBS determination of the fine-structure constant, and of the quantized Hall resistance and Josephson frequency-to-voltage quotient in SI units », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **38**:2, pages 284–289. DOI: 10.1109/19.192289 (cf. page 29).

- [124] P. OLSEN, W. TEW, E. WILLIAMS, R. ELMQUIST et H. SASAKI, 1991. « Monitoring the mass standard via the comparison of mechanical to electrical power », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **40**:2, pages 115–120. DOI: 10.1109/TIM.1990.1032895 (cf. page 29).
- [125] K. FUJII, E. WILLIAMS, R. STEINER et D. NEWELL, 1997. « A new refractometer by combining a variable length vacuum cell and a double-pass Michelson interferometer », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **46**:2, pages 191–195. DOI: 10.1109/19.571809 (cf. page 29).
- [126] E. R. WILLIAMS, R. L. STEINER, D. B. NEWELL et P. T. OLSEN, 1998. « Accurate Measurement of the Planck Constant », *Physical Review Letters* **81**:12, pages 2404–2407. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.2404 (cf. page 29).
- [127] R. STEINER, D. NEWELL et E. WILLIAMS, 1999. « A result from the NIST watt balance and an analysis of uncertainties », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **48**:2, pages 205–208. DOI: 10.1109/19.769564 (cf. page 29).
- [128] R. STEINER, D. NEWELL et E. WILLIAMS, 2005. « Details of the 1998 watt balance experiment determining the Planck constant », *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **110**:1, page 1. URL: [nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/110/1/j110-1ste.pdf](http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/110/1/j110-1ste.pdf) (cf. page 29).
- [129] D. NEWELL, R. STEINER, E. WILLIAMS et A. PICARD. « The next generation of the NIST watt balance ». In : *1998 Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest*. 1998 Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest. Juil. 1998, pages 108–109. DOI: 10.1109/CPEM.1998.699806 (cf. page 29).
- [130] R. STEINER, D. NEWELL, E. WILLIAMS, R. LIU et P. GOURNAY, 2005. « The NIST project for the electronic realization of the kilogram », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **54**:2, pages 846–849. DOI: 10.1109/TIM.2005.843577 (cf. page 29).
- [131] R. STEINER, D. NEWELL, E. WILLIAMS et R. LIU. « Status of the NIST “electronic kilogram” experiment ». In : *Conference Digest 2002 Conference on Precision Electromagnetic Measurements, 2002*. Conference Digest 2002 Conference on Precision Electromagnetic Measurements, 2002. Juin 2002, pages 578–579. DOI: 10.1109/CPEM.2002.1034979 (cf. page 29).
- [132] R. L. STEINER, E. R. WILLIAMS, D. B. NEWELL et R. LIU, 2005. « Towards an electronic kilogram : an improved measurement of the Planck constant and electron mass », *Metrologia* **42**: page 431. URL: <http://iopscience.iop.org/0026-1394/42/5/014> (visité le 20/06/2012) (cf. page 29).

- [133] B. KIBBLE, L. ROBINSON et J. BELLIS. « Re-defining the kilogram via a moving-coil apparatus ». In : *Conference on Precision Electromagnetic Measurements, 1990. CPEM '90 Digest*. Conference on Precision Electromagnetic Measurements, 1990. Juin 1990, pages 178–179. DOI : 10.1109/CPEM.1990.109978 (cf. page 30).
- [134] I. ROBINSON, B. KIBBLE et J. BELLIS. « The NPL moving-coil watt balance ». In : *Conference on Precision Electromagnetic Measurements, 1994. Digest*. Conference on Precision Electromagnetic Measurements 1994. Juin 1994, pages 527–. DOI : 10.1109/CPEM.1994.333182 (cf. page 30).
- [135] I. ROBINSON et B. KIBBLE. « Further progress in relating the kilogram to  $h$  with the NPL watt balance ». In : *2000 Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest*. 2000 Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest. Mai 2000, pages 540–541. DOI : 10.1109/CPEM.2000.851121 (cf. page 30).
- [136] I. A. ROBINSON et B. P. KIBBLE, 2007. « An initial measurement of Planck's constant using the NPL Mark II watt balance », *Metrologia* **44**: page 427. URL : <http://iopscience.iop.org/0026-1394/44/6/001> (visité le 29/06/2012) (cf. page 30).
- [137] I. A. ROBINSON, 2012. « Towards the redefinition of the kilogram : a measurement of the Planck constant using the NPL Mark II watt balance », *Metrologia* **49**:1, pages 113–156. DOI : 10.1088/0026-1394/49/1/016 (cf. page 30).
- [138] W. BEER, B. JEANNERET, B. JECKELMANN, P. RICHARD, A. COURTEVILLE, Y. SALVADE et R. DANDLIKER, 1999. « A proposal for a new moving-coil experiment », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **48**:2, pages 192–195. DOI : 10.1109/19.769561 (cf. page 30).
- [139] W. BEER, A. L. EICHENBERGER, B. JEANNERET, B. JECKELMANN, P. R. H. SCHNEITER, A. R. POURZAND, A. COURTEVILLE et R. DANDLIKER, 2001. « The OFMET watt balance : Progress report », *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on* **50**:2, pages 583–586. DOI : 10.1109/19.918197 (cf. page 30).
- [140] W. BEER, A. EICHENBERGER, B. JEANNERET, B. JECKELMANN, A. POURZAND, P. RICHARD et J. SCHWARZ, 2003. « Status of the METAS watt balance experiment », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **52**:2, pages 626–630. DOI : 10.1109/TIM.2003.810033 (cf. page 30).
- [141] A. L. EICHENBERGER, A. JOYET, B. JECKELMANN, B. JEANNERET et P. RICHARD. « Mechanical improvements in the METAS watt balance ». In : *Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM 2006)*. Torino. 2006, page 706 (cf. page 30).

- [142] A. EICHENBERGER, J. BUTTY, B. JEANNERET, B. JECKELMANN, A. JOYET, T. KREBS et P. RICHARD. « A New Magnet Design for the METAS Watt Balance ». In : *2004 Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest*. 2004 Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest. Juin 2004, pages 56–57. DOI : 10.1109/CPEM.2004.305418 (cf. page 30).
- [143] A. EICHENBERGER, H. BAUMANN, B. JEANNERET et B. JECKELMANN. « Reproducibility of the METAS watt balance ». In : *Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest, 2008. CPEM 2008*. Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest, 2008. CPEM 2008. Juin 2008, pages 12–13. DOI : 10.1109/CPEM.2008.4574628 (cf. page 30).
- [144] A. EICHENBERGER, H. BAUMANN, B. JEANNERET, B. JECKELMANN, P. RICHARD et W. BEER, 2011. « Determination of the Planck constant with the METAS watt balance », *Metrologia* **48**: page 133. URL : <http://iopscience.iop.org/0026-1394/48/3/007> (visité le 20/06/2012) (cf. page 30).
- [145] I. A. ROBINSON et P. LOVELOCK. « The design of the third generation NPL watt balance ». In : *CPEM 2006 Conference on Precision Electromagnetic Measurements*. Turin, Italie, 2006, pages 124–125 (cf. page 30).
- [146] C. SANCHEZ, B. WOOD, A. INGLIS et I. ROBINSON. « Determination and correction of mass exchange errors in the NRC watt balance ». In : *2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM)*. 2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM). Juil. 2012, pages 428–429. DOI : 10.1109/CPEM.2012.6250986 (cf. page 31).
- [147] S. SCHLAMMINGER, R. L. STEINER, D. HADDAD, D. B. NEWELL, F. SEIFERT, L. S. CHAO, R. LIU, E. R. WILLIAMS et J. R. PRATT, 2015. « A summary of the Planck constant measurements using a watt balance with a superconducting solenoid at NIST », *Metrologia* **52**:2, page L5. DOI : 10.1088/0026-1394/52/2/L5 (cf. pages 31, 32).
- [148] C. A. SANCHEZ, B. M. WOOD, R. G. GREEN, J. O. LIARD et D. INGLIS, 2015. « Corrigendum to the 2014 NRC determination of Planck's constant », *Metrologia* **52**:4, page L23. DOI : 10.1088/0026-1394/52/4/L23 (cf. page 31).
- [149] C. M. SUTTON, 2009. « An oscillatory dynamic mode for a watt balance », *Metrologia* **46**: page 467. URL : <http://iopscience.iop.org/0026-1394/46/5/010> (visité le 20/06/2012) (cf. page 32).
- [150] C. M. SUTTON et M. P. FITZGERALD, 2009. « Performance aspects of gas-operated pressure balances as pressure standards », *Metrologia* **46**:6, pages 655–660. DOI : 10.1088/0026-1394/46/6/007 (cf. page 33).

- [151] C. SUTTON, M. FITZGERALD et D. JACK. « The concept of a pressure balance based watt balance ». In : *2010 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM)*. 2010 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM). Juin 2010, pages 131–132. DOI : 10.1109/CPEM.2010.5544277 (cf. page 33).
- [152] C. M. SUTTON et M. T. CLARKSON, 2014. « A magnet system for the MSL watt balance », *Metrologia* **51**:2, S101. DOI : 10.1088/0026-1394/51/2/S101 (cf. page 33).
- [153] Z. ZHANG, Q. HE, Z. LI, B. HAN, Y. LU, J. LAN, S. LI et Y. FU. « The Joule Balance in progress ». In : *2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM)*. 2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM). Juil. 2012, pages 432–433. DOI : 10.1109/CPEM.2012.6250988 (cf. page 33).
- [154] Z. ZHONGHUA, H. QING, L. ZHENGKUN, H. BING, L. YUNFENG, L. JIANG, L. CHEN, L. SHISONG, X. JINXIN, W. NONG, W. GANG et G. HONGZHI, 2014. « The joule balance in NIM of China », *Metrologia* **51**:2, S25. DOI : 10.1088/0026-1394/51/2/S25 (cf. page 33).
- [155] A. PICARD, M. STOCK, HAO FANG, T. WITT et D. REYMANN, 2007. « The BIPM Watt Balance », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **56**:2, pages 538–542. DOI : 10.1109/TIM.2007.890783 (cf. page 33).
- [156] A. PICARD, M. P. BRADLEY, H. FANG, A. KISS, E. de MIRANDES, B. PARKER, S. SOLVE et M. STOCK, 2011. « The BIPM Watt Balance : Improvements and Developments », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **60**:7, pages 2378–2386. DOI : 10.1109/TIM.2011.2126130 (cf. page 33).
- [157] H. FANG, A. KISS, L. ROBERTSSON, A. ZEGGAGH, J. LAN, E. d. MIRANDES, S. SOLVE, A. PICARD et M. STOCK. « Status of the BIPM watt balance ». In : *2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM)*. Juil. 2012, pages 424–425. DOI : 10.1109/CPEM.2012.6250984 (cf. page 33).
- [158] H. BAUMANN, A. EICHENBERGER, F. COSANDIER, B. JECKELMANN, R. CLAVEL, D. REBER et D. TOMMASINI, 2013. « Design of the new METAS watt balance experiment Mark II », *Metrologia* **50**:3, page 235. DOI : 10.1088/0026-1394/50/3/235 (cf. page 33).
- [159] L. CHAO, F. SEIFERT, A. CAO, D. HADDAD, D. NEWELL, S. SCHLAMMINGER et J. PRATT. « The design of the new NIST-4 watt balance ». In : *2014 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM 2014)*. 2014 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM 2014). août 2014, pages 364–365. DOI : 10.1109/CPEM.2014.6898410 (cf. page 33).

- [160] F. SEIFERT, A. PANNA, S. LI, B. HAN, L. CHAO, A. CAO, D. HADDAD, H. CHOI, L. HALEY et S. SCHLAMMINGER, décembre 2014. « Construction, Measurement, Shimming, and Performance of the NIST-4 Magnet System », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **63**:12, pages 3027–3038. DOI : 10.1109/TIM.2014.2323138 (cf. page 33).
- [161] F. VILLAR, G. GENEVÈS et J. DAVID. « Determination and minimization of parasitic forces and moments in the static step of the LNE watt balance experiment ». In : *Precision Electromagnetic Measurements (CPEM), 2010 Conference on*. 2010, pages 34–35. DOI : 10.1109/CPEM.2010.5543361 (cf. pages 35, 46, 65, 117, 165).
- [162] S. MERLET, P. GILLOT, T. FARAH, Q. BODART, J. LE GOUET, P. CHEINET, C. GUERLIN, A. LOUCHET-CHAUVEY, N. MALOSI, A. KOPAEV et al., 2014. « Détermination de l'accélération de la pesanteur pour la balance du watt du LNE », URL : [http://www.metrologie-francaise.fr/publications/revue\\_francaise\\_metrologie/2014-04/RFM36-14013.pdf](http://www.metrologie-francaise.fr/publications/revue_francaise_metrologie/2014-04/RFM36-14013.pdf) (visité le 19/02/2015) (cf. pages 38, 39).
- [163] F. VILLAR, J. DAVID et G. GENEVÈS, 2011. « 75mm stroke flexure stage for the LNE watt balance experiment », *Precision Engineering* **35**:4, pages 693–703. DOI : 10.1016/j.precisioneng.2011.06.003 (cf. pages 42, 43).
- [164] P. PINOT, G. GENEVÈS, D. HADDAD, J. DAVID, P. JUNCAR, M. LECOLLINET, S. MACÉ et F. VILLAR, 2007. « Theoretical analysis for the design of the French watt balance experiment force comparator », *Review of Scientific Instruments* **78**:9, page 095108. DOI : 10.1063/1.2789665 (cf. pages 44, 65, 82).
- [165] A. PICARD, 2004. « The BIPM flexure-strip balance FB-2 », *Metrologia* **41**:4, pages 319–329. DOI : 10.1088/0026-1394/41/4/014 (cf. page 45).
- [166] H. A. BOWMAN et L. B. MACURDY, 1960. « Gimbal Device to Minimize the Effects of Off-Center Loading on Balance Pans », *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. URL : [http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/64C/jresv64Cn4p277\\_A1b.pdf](http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/64C/jresv64Cn4p277_A1b.pdf) (visité le 05/10/2012) (cf. page 45).
- [167] H. A. BOWMAN et H. E. ALMER. *Minimization of the arrestment error in one-pan, two-knife balance systems*. National Bureau of Standards, 1963. URL : <http://archive.org/details/jresv67Cn3p227> (visité le 04/11/2014) (cf. page 45).
- [168] P. PINOT, G. GENEVÈS, P. JUNCAR, M. LECOLLINET, S. MACÉ et F. VILLAR. « Expérience française de la balance du watt : conception et réalisation du comparateur de forces ». In : *Actes du 12<sup>e</sup> congrès international de métrologie*. Douzième congrès international de métrologie. Lyon, 20 juin 2005. URL : [https://www.lne.fr/publications/actes\\_12e\\_congres\\_metrologie/balance\\_watt\\_comparateur\\_force.pdf](https://www.lne.fr/publications/actes_12e_congres_metrologie/balance_watt_comparateur_force.pdf) (visité le 20/06/2012) (cf. pages 45, 46).



- [169] T. J. QUINN, 1992. « The beam balance as an instrument for very precise weighing », *Measurement Science and Technology* **3**:2, pages 141–159. DOI : 10.1088/0957-0233/3/2/001 (cf. pages 46, 80).
- [170] G. GENEVÈS. « Une methode de determination des effets de désalignement dans les experiences de balance du watt ». In : *Congrès international de métrologie*. Paris, 2011 (cf. page 51).
- [171] F. VILLAR. « Conception, réalisation et caractérisation de systèmes mécaniques pour l'expérience française de "balance du watt" ». Thèse de doctorat. Conservatoire national des arts et métiers – CNAM, 10 déc. 2008. URL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00369283> (visité le 14/03/2014) (cf. pages 51–53, 110, 117, 165, 166).
- [172] P. GOURNAY, G. GENEVÈS, F. ALVES, M. BESBES, F. VILLAR et J. DAVID, 2005. « Magnetic circuit design for the BNM Watt balance experiment », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **54**:2, pages 742–745. DOI : 10.1109/TIM.2004.843072 (cf. pages 52, 65).
- [173] F. VILLAR, P. GOURNAY, J. DAVID et G. GENEVÈS. « A measuring machine for the magnetic circuit of the LNE watt balance ». In : *Precision Electromagnetic Measurements Digest, 2008. CPEM 2008. Conference on*. 2008, pages 128–129. DOI : 10.1109/CPEM.2008.4574686 (cf. page 53).
- [174] K. OUEDRAOGO, S. TOPSU, J. GAYHMOUNI, L. CHASSAGNE, Y. ALAYLI, P. JUNCAR, P. GOURNAY, F. BIELSA et G. GENEVÈS, 2012. « Accurate ellipsometric magnetic-field sensor used to align the watt balance magnetic circuit of the French National Metrology Institute », *Sensors and Actuators A : Physical* **175**: pages 9–14. DOI : 10.1016/j.sna.2011.11.031 (cf. page 53).
- [175] S. MERLET. « Détermination absolue de g dans le cadre de l'expérience de la balance du watt ». Thèse de doctorat. Observatoire de Paris, 5 juil. 2010. URL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00517127> (visité le 04/01/2013) (cf. pages 55, 66).
- [176] A. LOUCHET-CHAUVET, T. FARAH, Q. BODART, A. CLAIRON, A. LANDRAGIN, S. MERLET et F. P. D. SANTOS, 2011. « The influence of transverse motion within an atomic gravimeter », *New Journal of Physics* **13**:6, page 065025. DOI : 10.1088/1367-2630/13/6/065025 (cf. page 55).
- [177] Z. JIANG, V. PÁLINKÁŠ, F. E. ARIAS, J. LIARD, S. MERLET, H. WILMES, L. VITUSHKIN, L. ROBERTSSON, L. TISSERAND, F. PEREIRA DOS SANTOS, Q. BODART, R. FALK, H. BAUMANN, S. MIZUSHIMA, J. MÄKINEN, M. BILKER-KOIVULA, C. LEE, I. M. CHOI, B. KARABOCE, W. JI, Q. WU, D. RUESS, C. ULLRICH, J. KOSTELECKÝ, D. SCHMERGE, M. ECKL, L. TIMMEN, N. LE MOIGNE, R. BAYER, T. OLSZAK, J. ÅGREN, C. DEL NEGRO, F. GRECO, M. DIAMENT, S. DEROUSSI, S. BONVALOT, J. KRYNSKI, M. SEKOWSKI, H. HU, L. J. WANG, S. SVITLOV, A. GERMAK, O. FRANCIS,

- M. BECKER, D. INGLIS et I. ROBINSON, 2012. « The 8<sup>th</sup> International Comparison of Absolute Gravimeters 2009 : the first Key Comparison (CCM.G-K1) in the field of absolute gravimetry », *Metrologia* **49**:6, pages 666–684. DOI : 10.1088/0026-1394/49/6/666 (cf. page 55).
- [178] O. FRANCIS, H. BAUMANN, T. VOLARIK, C. ROTHLEITNER, G. KLEIN, M. SEIL, N. DANDO, R. TRACEY, C. ULLRICH, S. CASTEILEIN, H. HUA, W. KANG, S. CHONGYANG, X. SONGBO, T. HONGBO, L. ZHENGYUAN, V. PÁLINKÁS, J. KOSTELECKÝ, J. MÄKINEN, J. NÄRÄNEN, S. MERLET, T. FARAH, C. GUERLIN, F. P. D. SANTOS, N. L. MOIGNE, C. CHAMPOLLION, S. DEVILLE, L. TIMMEN, R. FALK, H. WILMES, D. IACOVONE, F. BACCARO, A. GERMAK, E. BIOLCATI, J. KRYNSKI, M. SEKOWSKI, T. OLSZAK, A. PACHUTA, J. AGREN, A. ENGFELDT, R. REUDINK, P. INACIO, D. MCLAUGHLIN, G. SHANNON, M. ECKL, T. WILKINS, D. v. WESTRUM et R. BILLSON, 2013. « The European Comparison of Absolute Gravimeters 2011 (ECAG-2011) in Walferdange, Luxembourg : results and recommendations », *Metrologia* **50**:3, page 257. DOI : 10.1088/0026-1394/50/3/257 (cf. page 55).
- [179] S. MERLET, A. KOPAEV, M. DIAMENT, G. GENEVÈS, A. LANDRAGIN et F. PEREIRA DOS SANTOS, 2008. « Micro-gravity investigations for the LNE watt balance project », *Metrologia* **45**:3, pages 265–274. DOI : 10.1088/0026-1394/45/3/002 (cf. page 55).
- [180] G. D'AGOSTINO, S. MERLET, A. LANDRAGIN et F. PEREIRA DOS SANTOS, 2011. « Perturbations of the local gravity field due to mass distribution on precise measuring instruments : a numerical method applied to a cold atom gravimeter », *Metrologia* **48**:5, pages 299–305. DOI : 10.1088/0026-1394/48/5/009 (cf. page 55).
- [181] P.-A. MEURY. « Alliages métalliques pour l'étalon de masse de la balance du watt et des références secondaires ». Thèse de doctorat. École nationale supérieure des mines de Paris, 7 déc. 2005. URL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00159327> (visité le 26/03/2014) (cf. pages 55, 65, 72).
- [182] F. E. JONES et R. M. SCHOONOVER. *Handbook of Mass Measurement*. crc Press, 26 mar. 2002. 338 pages (cf. page 56).
- [183] P. PINOT, 1995. « Stability of Mass Standards Made of XSH Alacrite : Gravimetric Study of the Influence of Cleaning », *Metrologia* **31**:5, page 357. DOI : 10.1088/0026-1394/31/5/003 (cf. page 56).
- [184] P. PINOT, 1997. « Stability of XSH Alacrite mass standards : study of the effect of the BIPM cleaning/washing method », *Metrologia* **34**:2, page 133. DOI : 10.1088/0026-1394/34/2/4 (cf. page 56).
- [185] D. HADDAD, P. JUNCAR, G. GENEVÈS et M. WAKIM, 2009. « Gaussian Beams and Spatial Modulation in Nanopositioning », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **58**:4, pages 1003–1009. DOI : 10.1109/TIM.2008.2008475 (cf. pages 58, 92, 94).

- [186] F. BIELSA. « Capteurs optiques pour l'expérience de balance du watt du LNE ». In : *Congrès international de métrologie*. Paris, 2011 (cf. pages 58, 66).
- [187] F. VILLAR, J. M. DAVID, G. GENEVÈS, P. JUNCAR et P. PINOT. « Long stroke flexure stage for a watt balance experiment ». In : *Proceedings of the sixth Euspen International Conference*. Baden bei Wien, mai 2006 (cf. page 65).
- [188] R. S. DAVIS, 1995. « Determining the magnetic properties of 1 kg mass standards », *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol* **100**: pages 209–209. URL : <http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/100/3/j13dav.pdf> (visité le 04/11/2014) (cf. page 70).
- [189] R. DAVIS, 2004. « Erratum : Determining the magnetic properties of 1 kg mass standards (vol 100, No. 3, pg 209, 1995) », *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol* **109**:2, page 303. DOI : 10.6028/jres.109.022 (cf. page 70).
- [190] O. GILBERT, F. BIELSA, P. JUNCAR, A. EICHENBERGER et G. GENEVÈS. « Optical alignment tool for the LNE and METAS watt balance projects ». In : *2010 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM)*. 2010 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM). Juin 2010, pages 518–519. DOI : 10.1109/CPEM.2010.5543656 (cf. page 75).
- [191] C. C. SPEAKE, 1987. « Fundamental Limits to Mass Comparison by Means of a Beam Balance », *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **414**:1847, pages 333–358. DOI : 10.1098/rspa.1987.0147 (cf. page 80).
- [192] T. J. QUINN, C. C. SPEAKE et R. S. DAVIS, 1986. « A 1 kg Mass Comparator Using Flexure-Strip Suspensions : Preliminary Results », *Metrologia* **23**:2, pages 87–100. DOI : 10.1088/0026-1394/23/2/002 (cf. page 80).
- [193] F. S. EASTMAN, 1937. « The Design of Flexure Pivots », *Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)* **4**:1, pages 16–21. DOI : 10.2514/8.499 (cf. page 82).
- [194] W. H. WITTRICK, 1948. « The theory of symmetrical crossed flexure pivots », *Aust. J. Sci. Res. A* **1**: pages 121–134 (cf. page 82).
- [195] W. H. WITTRICK, 1951. « The properties of crossed flexure pivots, and the influence of the point at which the strips cross », *Aeronautical Quarterly* **11**: pages 272–292 (cf. page 82).
- [196] W. D. WEINSTEIN, 1965. « Flexure-pivot bearings », *Machine Design* **37**: pages 136–145 (cf. page 82).
- [197] T. J. QUINN, C. C. SPEAKE et L. M. BROWN, 1992. « Materials problems in the construction of long-period pendulums », *Philosophical Magazine A* **65**:2, pages 261–276. DOI : 10.1080/01418619208201522 (cf. page 82).

- [198] T. QUINN, C. SPEAKE, R. DAVIS et W. TEW, 1995. « Stress-dependent damping in CuBe torsion and flexure suspensions at stresses up to 1.1 GPa », *Physics Letters A* **197**:3, pages 197–208. DOI: 10.1016/0375-9601(94)00921-B (cf. page 82).
- [199] M. THOMAS, P. ESPEL, Y. BRIAND, G. GENEVÈS, F. BIELSA, P. PINOT, P. JUNCAR et F. PIQUEMAL, 2014. « Minimization of the coil movement of the LNE watt balance during weighing mode and estimation of parasitic forces and torques involved », *Metrologia* **51**:2, S54. DOI: 10.1088/0026-1394/51/2/S54 (cf. pages 105, 116, 131, 173).
- [200] MICHEL LECOLLINET. *Cours de métrologie B1 – CNAM*. 1998 (cf. page 115).
- [201] M. THOMAS, P. ESPEL, D. ZIANE, P. PINOT, P. JUNCAR, F. P. D. SANTOS, S. MERLET, F. PIQUEMAL et G. GENEVÈS, 2015. « First determination of the Planck constant using the LNE watt balance », *Metrologia* **52**:2, page 433. DOI: 10.1088/0026-1394/52/2/433 (cf. pages 135, 173).
- [202] P. E. CIDDÓR, 1996. « Refractive index of air : new equations for the visible and near infrared », *Applied Optics* **35**:9, pages 1566–1573. DOI: 10.1364/AO.35.001566 (cf. pages 135, 147).
- [203] A. PICARD, R. S. DAVIS, M. GLÄSER et K. FUJII, 2008. « Revised formula for the density of moist air (CIPM-2007) », *Metrologia* **45**:2, pages 149–155. DOI: 10.1088/0026-1394/45/2/004 (cf. pages 135, 146, 161).
- [204] M. STOCK. *Communication privée*. 2014 (cf. page 146).
- [205] F.-X. MALETRAS, P. GOURNAY, I. ROBINSON et G. GENEVÈS, 2007. « A Bias Source for Dynamic Voltage Measurements With a Programmable Josephson Junction Array », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **56**:2, pages 495–499. DOI: 10.1109/TIM.2007.891061 (cf. page 152).
- [206] P. GIACOMO, 1984. « News from the BIPM », *Metrologia* **20**:1, page 25. DOI: 10.1088/0026-1394/20/1/005 (cf. page 156).
- [207] P. SAUNDERS et D. R. WHITE, 2004. « Interpolation errors for radiation thermometry », *Metrologia* **41**:1, page 41. DOI: 10.1088/0026-1394/41/1/006 (cf. page 156).
- [208] J. TERRIEN, 1972. « News from the Bureau International des Poids et Mesures », *Metrologia* **8**:1, page 32. DOI: 10.1088/0026-1394/8/1/006 (cf. page 156).
- [209] P. GIACOMO, 1980. « News from the BIPM », *Metrologia* **16**:1, page 55. DOI: 10.1088/0026-1394/16/1/008 (cf. page 156).
- [210] M. THOMAS, P. ESPEL, F. BIELSA, P. JUNCAR, P. PINOT et G. GENEVES. « Present status of the LNE watt balance ». In: *2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM)*. 2012 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM). Washington DC, juil. 2012, pages 332–333. DOI: 10.1109/CPEM.2012.6250937 (cf. page 173).

- [211] M. THOMAS, P. ESPEL, F. BIELSA, G. GENEVÈS, F. PIQUEMAL, P. JUNCAR et P. PINOT. « Progress report of the LNE watt balance ». In : *2014 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM)*. 2014 Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM). Rio de Janeiro, août 2014. DOI : 10.1109/CPEM.2014.6898414 (cf. page 173).
- [212] M. THOMAS, F. BIELSA, Y. BRIAND, F. KOUMOUNDJI, P. ESPEL, G. GENEVÈS, P. JUNCAR, S. MERLET, P.-A. MEURY, F. PEREIRA DOS SANTOS et P. PINOT. « Une méthode de mesure de la constante de Planck : la balance du watt ». In : *Congrès international de métrologie*. Paris, 2013 (cf. page 173).



## Détermination de la constante de Planck au moyen d'une balance du watt

**RÉSUMÉ.** — Dans l'optique d'une modification du SI<sup>1</sup> fondée sur la valeur de constantes fondamentales de la physique, le LCM-LNE/CNAM<sup>2</sup> a développé une expérience de balance du watt, de manière à participer à la redéfinition de l'unité de masse : le kilogramme. Cette unité est en effet la dernière des unités de base du SI qui repose encore sur un artefact matériel : le prototype international du kilogramme.

Une bobine, plongée dans un flux magnétique est le cœur du dispositif de la balance du watt. Elle permet la comparaison d'une puissance électrique et d'une puissance mécanique virtuelles. La détermination des grandeurs électriques par comparaison à l'effet Josephson et à l'effet Hall quantique permet alors d'établir une relation entre une masse macroscopique et la constante de Planck.

Après une dizaine d'années de développements séparés des différents éléments, de très nombreuses caractérisations et améliorations, les premiers travaux de cette thèse ont consisté en l'assemblage des sous-ensembles de la balance du watt.

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'évaluation des composantes principales d'incertitudes, en particulier à celles qui concernent les problématiques d'alignement : alignement sur la verticale des faisceaux lasers des interféromètres mesurant la vitesse de la bobine, alignement sur l'horizontale des pivots du comparateur de forces ; enfin à l'évaluation des forces de Laplace horizontales et des moments parasites s'exerçant sur la bobine et à leurs influences sur la détermination de la constante de Planck.

Une valeur de la constante de Planck a été déterminée à l'été 2014, qui conduit à  $h = 6,626\,068\,8(20) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , évaluation dont l'incertitude-type relative est  $3,1 \times 10^{-7}$ . Des propositions pour améliorer cette incertitude sont avancées.

**MOTS CLEFS.** — Métrologie, balance du watt, constante de Planck, Système international, kilogramme, forces.

## Planck constant determination by means of a watt balance

**ABSTRACT.** — In the view of a forthcoming modification of the SI<sup>2</sup> based on value of fundamental constants of physics, the LCM-LNE/CNAM<sup>3</sup> has developed a watt balance experiment to contribute to the redefinition of the unit of mass: the kilogram. Indeed, this unit is the last of the base units of the SI based on a material artefact namely the international prototype of kilogram.

A coil, immersed in a radial and horizontal magnetic flux is the centre of the watt balance device. It allows to compare virtual electric and mechanical powers. The determination of electrical quantities referenced to the Josephson effect and the quantum Hall effect establishes a relationship between a macroscopic mass and the Planck constant.

After separate developments of the different elements with on going characterizations and improvements, the entire system has been assembled. The first work of this thesis consisted in the assembly of subcomponents of the watt balance.

Thereafter, we evaluated the main components of uncertainties, especially those related to alignment : alignment relative to the vertical of the laser beam interferometers which measure the velocity of the coil, alignment with respect to the horizontal of the pivots from the beam of the force comparator and finally the evaluation of horizontal Laplace forces and parasitic moments acting on the coil and their influences on determining Planck's constant.

A determination of the Planck constant was then carried out in the summer of 2014, which gave  $h = 6,626\,068\,8(20) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ . The relative standard uncertainty associated is  $3,1 \times 10^{-7}$ . Suggestions to improve this uncertainty are given.

**KEY WORDS.** — Metrology, watt balance, Planck constant, Système international, forces, kilogram.

---

1. Système international d'unités.

2. Laboratoire commun de métrologie (LCM) : laboratoire commun au Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE) et au Conservatoire national des arts et métiers (CNAM).

2. Système international d'unités.

3. The Laboratoire commun de métrologie (LCM) is a joint metrology laboratory set up between the Laboratoire national de métrologie et d'essais (LNE) and the Conservatoire national des arts et métiers (CNAM).